DOCTORA MONTESSORI

PSICO-ARITMÉTICA

ARALUCE · EDITOR · BARCELONA

OBRAS DE LA DOCTORA MONTESSORI

PUBLICADAS POR ESTA EDITORIAL

METODO DE LA PEDAGOGIA CIENTIFICA

Aplicada a la educación de la infancia en la «Casa dei Bambini» (Casa de los niños). Segunda edición. Un tomo de 295 páginas, ilustrado, encuadernado en tela.

ANTROPOLOGIA PEDAGOGICA.

Un tomo de 500 páginas con 12 figuras y láminas, encuadernado en tela.

MANUAL PRACTICO DEL METODO MONTESSORI.

Segunda edición, ampliada, modificada y completada con las nuevas ideas y regímenes educadores de la autora. Un tomo de 207 páginas, 30 grabados y una lámina en color, encuadernado en tela.

LA AUTO-EDUCACION EN LA ESCUELA ELEMENTAL.

Agotada.

CUADERNO DE DIBUJO MONTESSORI.

Agotado.

PSICO-GEOMETRIA.

Obra ilustrada con cerca de 300 figuras en colores. Un tomo encuadernado.

LA MISA, las prácticas litúrgicas al alcance de los niños.

DOCTORA MARIA MONTESSORI

PSICO ARITMÉTICA

LA ARITMÉTICA DESARROLLADA CON ARREGLO A LAS DIRECTRICES SEÑALADAS POR LA PSICOLOGÍA INFANTIL, DURANTE VEINTICINCO AÑOS DE EXPERIENCIA

ILUSTRADA CON 300 FIGURAS EN COLORES

VERSIÓN ESPAÑOLA

PRIMERA EDICIÓN DE ESTA OBRA NO PUBLICADA EN OTRO IDIOMA

CASA EDITORIAL ARALUCE

:: CALLE DE LAS CORTES, NÚM. 392. — BARCELONA ::

ES PROPIEDAD DEL EDITOR
Queda hecho el depósito que marca la Ley.
Copyright 1934
by R. de S. N. Araluce

PRINTED IN SPAIN
IMPRESO EN ESPAÑA

Talleres Gráficos GARROFE, BARCELONA : : Año 1934

PREFACIO

La Aritmética, según se presenta en este libro, contiene un capítulo todavía inédito de «psicología infantil», puesto que es una forma de aritmética razonada, e infantil en su razonamiento. Los números, con sus derivaciones, han sido estímulos científicos que han provocado actividades psíquicas.

Se ha repetido siempre que la aritmética, y en general las ciencias matemáticas, tienen en la educación el oficio importante de ordenar la mente juvenil, preparándola, con rigurosa disciplina, para ascender a las alturas de la abstracción. Pero esta importancia doble, es decir, de «medio de desarrollo mental» y «necesaria y elemental cultura», no se alcanzaba con eficacia en las escuelas elementales. En efecto, la aritmética se consideraba un «escollo» difícil de superar, una «dificultad» que requería un esfuerzo penoso, «una disciplina árida».

Pero, presentando al niño un «material científicamente determinado», que le ofrece de un modo «claro» «evidente», el fundamento sobre el cual debe levantarse la actividad razonadora, entonces se facilita no solamente el aprendizaje de la aritmética, dándole una forma elevada, sino también el desarrollo de una profundidad lógica que se hubiera creído imposible de alcanzar en los niños. Los materiales de la aritmética pueden compararse a «una palestra de gimnasia mental». En el minucioso análisis realizado sobre la evidencia de las cosas y sobre el ejercicio activo, todos los detalles acompañan al desarrollo psí-

co, como si la aritmética fuese el medio más práctico para un verdadero tratamiento psicológico del niño, un arsenal maravilloso de psicología experimental.

Cada individuo se ejercita por sí solo con vivo interés; el progreso sobreviene en cada discípulo según el dictamen interior de la necesidad de desarrollo; y de aquí al nivel de madurez propio de cada uno, y, como consecuencia de la libre selección, se alcanza un progreso mental lógico y sistemático. En veinte años de amplia e ininterrumpida experiencia, ninguna disciplina consiguió en nuestras escuelas entusiasmar a los niños tanto como la aritmética, ni en ninguna disciplina hemos alcanzado progresos tan sorprendentes como los alcanzados en el campo de las matemáticas. Queda, pues, abierta en el campo de la escuela elemental, una vía práctica y una extensión fértil, allí donde antes hallábamos tormentos y arideces de desierto.

Los fenómenos apasionantes encontrados a lo largo de esta experiencia han suscitado, aun en personas adultas, actividades fecundas, que superan el límite de la escuela elemental y penetran en el ámbito de la segunda enseñanza. Y en este libro se hallan incluídas las experiencias, acompañadas de materiales, debidos a la preciosa y constante colaboración de Mario Montessori; las sencillas y brillantes operaciones de extracción de raíces cúbicas y cuadradas de tres o cuatro cifras, se hacen accesibles a niños de ocho o nueve años de edad; y las elaboradas «materializaciones» de la cuarta y quinta potencias de binomios y trinomios, obtenidas a través de brillantes interpretaciones que asocian el álgebra, el número y la forma geométrica. De estas «materializaciones matemáticas», que serían de gran utilidad en la comprensión del álgebra en la escuela secundaria, se hace aquí un rápido estudio, pues requieren un tratamiento especial, una publicación aparte que esperamos del autor.

Los estudios precedentes están ya notablemente avanzados en la escuela secundaria.

Aquí quiero hacer un estudio de los fenómenos de índole psicológica, y recordar el hecho de que los discípulos-maestros han completado sus observaciones con el descubrimiento de fórmulas algebraicas y de relaciones numéricas. Algo parecido a lo que han hecho nuestros niños, quienes, sin embargo, operaban con problemas que sabían resolver solos, y llegaron a resultados completamente ignorados por sus maestros. Por consiguiente, hemos entrado en una vía que no es sólo de aprendizaje, sino también, de elaboración.

Siento vivo agradecimiento al editor, señor Araluce, que ha emprendido la publicación de estas obras: la psicogeometría y la psico-aritmética, fruto de un largo trabajo lentamente llevado a término en el recogimiento. No era fácil encontrar un editor con bastante coraje para lanzar al campo de la escuela elemental libros que se salen de las convenciones ortodoxas de la enseñanza, y que ponen el desarrollo psíquico del niño por encima de las disciplinas escolásticas, y que son al mismo tiempo libros que por la exactitud de la reproducción y por la riqueza de las ilustraciones sobrepasan en mucho el límite usual. Hacía falta para esto una persona convencida y capaz de impulsos generosos. Esta condición explica por qué los únicos libros de psico-geometría y psico-aritmética aparecen por primera vez en lengua española.

MARÍA MONTESSORI.

GENERALIDADES

RESUMEN DEL PERIODO PRE-ELEMENTAL

El primer material que se presenta a los niños para el aprendizaje de la Aritmética, es un sistema de diez bastones prismáticos de sección cuadrada de cuatro centímetros de lado, el primero de los cuales—que representa la unidad—tiene diez centímetros de largo, mientras el resto, tienen una longitud que aumenta sucesivamente de diez en diez centímetros hasta el décimo bastón que alcanza la de un metro.

Las longitudes múltiples de diez centímetros, se distinguen en los bastones más largos, por la sucesión alternativa de dos colores distintos. Solamente la unidad tiene un solo color, que es uno de los dos que se emplean para caracterizar el sistema. Por ejemplo: la unidad será azul; en el segundo bastón, los dos trozos de diez centímetros, uno azul y otro rosa; en el tercer bastón, dos trozos azul en los extremos y uno rosa en el centro. De este modo todos los bastones pueden comenzar con el trozo azul y así se consigue, igualmente, que los colores de las diversas unidades que componen el todo, sean claramente diferentes en su sucesión.

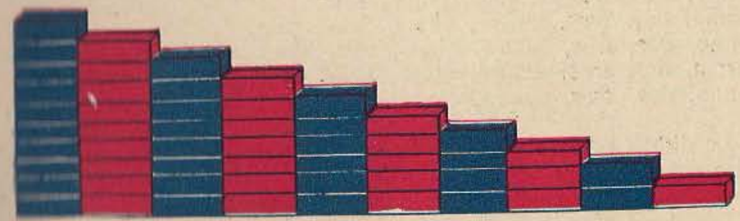


Fig. 1

Un material semejante, pero no marcado con dos colores distintos, sino, donde todos los bastones eran del mismo color, fué usado durante largo tiempo por los niños en un período precedente, cuando efectuaban los ejercicios sensoriales. Los pequeños se habían acostumbrado a distinguir a simple vista las longitudes diversas de los bastones, poniendo uno junto a otro y comprobando, de este modo, que la longitud crecía de un modo uniforme. Los niños que realizaban los ejercicios sensoriales eran de la edad de tres años.

Estos, en cambio, que comienzan a usar el sistema aritmético, tienen ya cuatro años y medio como mínimo y saben escribir, o por lo menos, conocen los signos alfabéticos y componen palabras.

Los niños a esta edad han contado o han oído contar en la vida familiar. Acaso pronuncian el nombre de los grandes números, ciento o mil, sin que tengan en su mente una idea clara de las cantidades equivalentes. En cambio, sí perciben claramente la equivalencia de los números pequeños, porque saben, que tienen una nariz, dos manos, cinco dedos en cada mano etc. Muchas veces habrán pedido tres bombones en vez de dos, sabiendo perfectamente lo que ello significaba.

Con los bastones de la Aritmética que llegan a un máximo de diez, no se pretende hacer una revelación, sino, más bien, ordenar y precisar ideas vagas adquiridas casualmente. Y para precisar estas ideas numéricas se recurre a un instrumento que fué ya utilizado en el período primitivo de los ejercicios sensoriales.

Basta iniciar al niño, con simplicidad, para que rápidamente se interese por el sistema numérico. En cada bastón se puede contar la suma de las unidades que van sucediéndose una a otra hasta el extremo del bastón comenzando por :

uno.
uno, dos.
uno, dos, tres.
uno, dos, tres, cuatro.
uno, dos, tres, cuatro, cinco.
uno, dos, trtes, cuatro, cinco, seis.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Lo última palabra a que se llega, se refiere a la suma de las unidades contenidas en el bastón, e indica el total. Esta palabra puede convertirse en un nombre que indica el bastón ; bastón de cinco, de siete, etc. O simplemente, el cinco, el siete y así sucesivamente. De ese modo, resultan varios nombres en relación con bastones de distinta longitud. Los bastones representan cantidades que se llaman.

El hecho de obtener, con relación al nombre del número, la cantidad correspondiente en una apariencia rígida y clara, facilita la comprensión de los conceptos de la unidad y de las relaciones recíprocas entre diversas cantidades, así como las relaciones entre éstas y la unidad.

En efecto. Los bastones colocados en gradación no sirven para contar solamente, sino que hacen ostensible la relación entre las va-

rías cantidades indicadas por los números y su lugar recíproco, en relación con dicha cantidad. El uno, es el primero, y el diez, el úl-

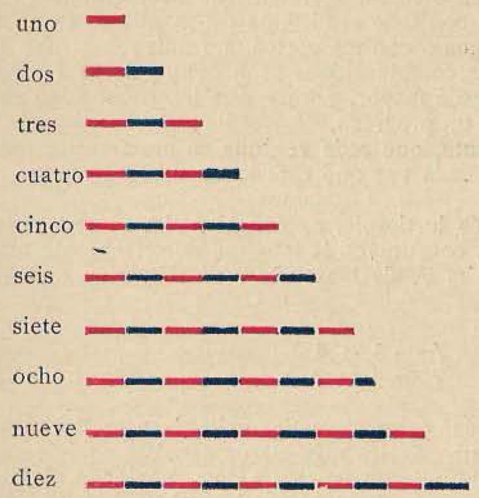


Fig. 2

timo ; el tres ocupa el tercer lugar y está entre el dos y el cuatro, etc. Son, pues, las relaciones entre ellos, y no solamente el contar, las que hacen el sistema interesante.

Para fijar bien este cuadro, de una importancia tan fundamental, conviene unir a su enseñanza el conocimiento de los símbolos numéricos y ponerlos en relación con las cantidades.

Un material, análogo al usado para enseñar las letras del alfabeto, está unido al sistema. Se trata de diez pequeños cartones lisos, sobre cada uno de los cuales, está fijada en papel de lija una de estas cifras : 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Dichos números se hacen palpar repetidamente en el sentido de la escritura mientras se aprende el nombre : uno, dos, tres, etc. Así queda en la memoria la figura de la cifra en relación con su nombre y, a la par, se acostumbra la mano a reproducir el trazado de cada una ; esto es, a escribirla.

El hecho de que a todo símbolo numérico pueda hacerse corresponder la cantidad total que aquel representa, bajo la forma de un objeto único, al igual que la cifra es un único signo, hace clara y fácil la asociación entre el símbolo numérico y la cantidad. Basta colocar, entonces, la cifra junto al bastón correspondiente para lograr, con presteza, la memorización de su correspondencia.

Del sistema, puesto en orden, pueden derivar estudios hechos a base de descomposiciones y recomposiciones, de cotejos, etc.

Se pueden efectuar ejercicios de desplazamiento y de comparación, ya sea con todo el sistema o con una parte de él, sea con los bastones largos o con los cortos. Lo único que hace falta vigilar es, que todas las combinaciones sean dentro de la decena, es decir, no pasar del bastón mayor, porque ello traería consigo una complicación en lugar de un progreso.

Es evidente, que cada vez que se unen varios bastones, se hace una suma y cada vez que esta suma se descompone, se efectúa una sustracción.

El interés lo despierta, por ejemplo, el encontrar dos bastones que, unidos, constituyen la longitud de otro bastón mayor. Por ejemplo : $4 + 3 = 7$, de los cuales, volviéndolos a su estado anterior, se obtiene :

$$7 - 3 = 4$$

o también $$7 - 4 = 3$$

Si después, estos ejercicios primitivos se llevan a cabo con todo el sistema, uno de los más claros consiste en la composición de todas las combinaciones iguales a diez, poniendo el 1 sobre el 9, el 2 sobre el 8, y así sucesivamente, es decir, realizando las siguientes sumas :

$$9 + 1 = 10$$
$$8 + 2 = 10$$
$$7 + 3 = 10$$
$$6 + 4 = 10$$

Inmediatamente surge el límite, dentro del cual, se encuentran las posibles combinaciones. Se pueden efectuar cuatro combinaciones solamente o sea cuatro bastones de diez, iguales al mayor de la serie y además de estas cuatro combinaciones quedan aún el bastón entero de diez y el bastón de cinco.

A un adulto, este método de los bastones, puede resultar tan interesante como a un niño. El adulto podría observar, por ejemplo, que la cantidad de bastones iguales es de 5 o sea la mitad de 10 y sobra un bastón que es el de 5. Agrupando en dicha forma los bastones, resulta evidente, que la suma de las unidades por ellos indicada es igual a

$$5 \times 10 + 5 = 55$$

es decir, que se ha encontrado un procedimiento que facilita singularmente la suma de todas las unidades contenidas en el sistema. Para ello, basta multiplicar el número mayor por su mitad y añadir después dicha mitad

Esto, como se ve claramente, permite efectuar de un modo rápido la suma de la serie natural de los números. Llamando N un número cualquiera, la suma de las unidades contenidas en todos los números que van de uno a N. será

$$\frac{N \times N}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N^2 + N}{2}$$

lo cual nos da la fórmula algebraica de lo anteriormente expuesto. En efecto ; en la serie sucesiva de los números crecientes, de unidad en unidad, se pueden componer grupos iguales al mayor, por el mismo procedimiento, esto es, colocando el uno sobre el penúltimo y sobre los sucesivos el dos, el tres, etc.

Es decir, que basándose en el mismo sistema se podrían hacer observaciones y comprobaciones permitidas por una cultura y un desarrollo mental superiores a los del niño. Sin embargo, adultos y niños pueden obtener los diversos resultado con el mismo material. En efecto, el material de bastones representa, de modo claro y sencillo, la relación entre cantidades numéricas sucesivas, partiendo de la unidad. Y esto, es un hecho inmutable. Es el hombre el que varía desarrollándose y el que deduce, de los mismos hechos, diversas consecuencias.

Esto sirve para hacer comprender como es preciso utilizar un material claro y exacto, y alrededor de ello, está después la inteligencia que se desarrolla, haciendo sucesivos descubrimientos.

En el sistema de los bastones están contenidos otros principios, que pueden ser utilizados en lo futuro ; dicho sistema presenta como en un núcleo el sistema decimal y juntamente con éste, el sistema métrico, porque, el bastón del 10 tiene un metro de longitud y las unidades en que se descomponen los diversos bastones, son su décima parte o sea el decímetro.

Pero estos particulares, no accesibles aún al niño, permanecen en el sistema sin complicarlo y es evidente, que el desarrollo mental y cultural sabrá descubrir y utilizar más tarde lo que pasó inadvertido en la primera infancia.

MATERIAL DE LAS UNIDADES SEPARADAS

Un segundo material repite el hecho de contar las unidades relativas a los varios grupos de la sucesión numérica de uno a diez, o mejor, de 0 a 9. En este caso, sin embargo, las unidades vienen representadas por objetos separados, todos iguales entre sí y consisten en pequeños husos fácilmente manejables y que, atados en grupos por una cinta, aparecen de un grosor que va en aumento. Tales grupos se deben colocar en dos cajitas, dividida cada una, en cinco espacios y en correspondencia con cada espacio, está escrita una cifra :

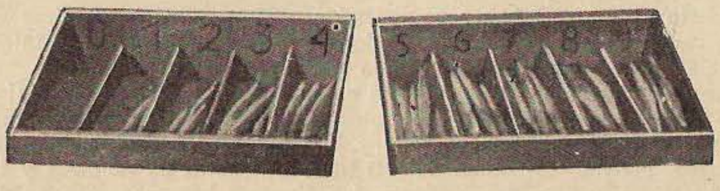


Fig. 3

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El ejercicio consiste en reunir primeramente, en un solo grupo de conjunto, toda la masa de husillos y colocar en cada espacio, contándolos uno a uno, la cantidad correspondiente al número señalado. Concluído el ejercicio y comprobado que no existen errores, cada grupo de husillos se ata con una cinta encarnada. Este ejercicio es casi una comprobación de lo que se aprendió con el sistema de los bastones ; el niño, en efecto, reconoce la cifra y compone por sí mismo el número acumulando las unidades (de cualquier clase) cuya suma aquélla representa.

Además, el material en este caso, ofrece al niño, como punto de partida, las cifras, los símbolos numéricos escritos sobre los espacios de las cajitas, y no las cantidades, como en el caso de los bastones. Las cifras están representadas todas ellas, pero no existe el 10 que,

en cambio, existía en el sistema de los bastones, y esto sucede porque el material expone a la atención del niño las cifras en sí. Estas van como indicaciones concretas del uoo al nueve. Antes de todas está el cero, que en sí mismo no representa cantidad alguna, como lo comprueba el hecho de que el primer espacio que a él corresponde permanece vacío. Las cifras son en número de diez, pero los grupos de husillos, son nueve solamente.

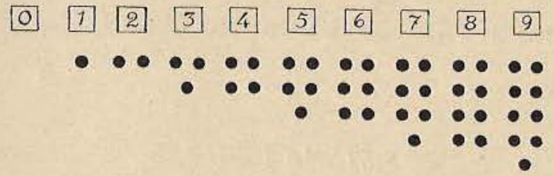


Fig. 4

Existe, finalmente, un tercer material consistente en diez pequeños carteles separados, sobre cada uno de los cuales aparece escrita una cifra respectivamente, o sea :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

y 45 pequeños objetos separados que pueden ser pequeños marcos de color o pequeños juguetes iguales, como muñequitas, pequeñas bolas, etc.

El ejercicio consiste en colocar primeramente los carteles—que están mezclados—según el orden normal de sucesión y después situar al pie de cada cifra, los objetos, en la cantidad correspondiente. Este ejercicio es una comprobación total de lo aprendido, es decir, ver si se conocen las cifras en su serie numérica y en la cantidad que representan. Para colocar un nuevo concepto al alcance del niño, conviene colocar en doble fila los objetos, lo cual es posible solamente, en los números pares, mientras en los impares, queda uno sin compañero y, de este modo, se le proporciona instintivamente la noción de los números pares e impares.

Los tres ejercicios recuerdan la lección psicológica de los tres tiempos (Véase, *Pedagogía Científica* de la misma autora).

En efecto ; en el primer tiempo está la representación de la cosa en sí misma (la cantidad y los signos numéricos).

En el segundo tiempo, se pide cual es la cantidad correspondiente a la cifra.

En el tercer tiempo, se pide tanto la sucesión de los números, como la cantidad correspondiente a ellos.

Con esto se cierra el período preelemental para la Aritmética. (Para mayores detalles véase la *Pedagogía Científica* precitada).

LA ARITMETICA EN LA INSTRUCCION ELEMENTAL

SISTEMA DECIMAL

El fundamento, sobre el cual nos basamos para ordenar las cantidades numéricas, es el sistema decimal. Su introducción entre nosotros, que data de los árabes, en la edad media, constituye una facilidad en el cálculo, tan sorprendente, que permite contar, incluso al niño, grandes cantidades. El cálculo, después, no es sino una ulterior abreviación de la operación de contar.

Como en toda obra de simplificación, lo que representa su clave, es un grado mayor de claridad alcanzado. Simplicidad y claridad, son, precisamente, las cualidades necesarias para colocar los hechos al alcance del niño.

Por esto, el primer paso debe ser : facilitar al niño la construcción del sistema decimal en sí mismo y no el contar ni calcular, porque estas dos cosas, se consiguen con los fáciles mecanismos que ofrece el sistema decimal.

Es evidente, que esto no podría constituir la primera iniciación de la aritmética, mas para ello, hubo un período preparatorio, en el cual el niño, ha contado y calculado dentro de la primera decena y ha leído y escrito los signos numéricos. Las primeras bases del sistema decimal le fueron proporcionadas en el período preelemental, al contar las cantidades dentro de la primera decena, y al comprobar que los signos que las representaban eran nueve más el cero. Estos dos conocimientos son la raíz, el fundamento, de todo el sistema decimal. La clave del sistema decimal consiste en el juego final, entre el nueve y el diez. Es esta clave la que sitúa la organización de las distintas clases de unidades en un cuadro sistemático interesantísimo. En efecto, apenas se supera la cantidad nueve de una unidad, no existen cifras para representar el nuevo grupo y precisa comenzar de nuevo utilizando la cifra uno. Es en el 10 donde aparece esta dificultad y de ello la necesidad de recurrir a un componente. El 10 no es, sino, un retorno a contar nuevamente de uno a nueve. Existe una especie de paso del Rubicón que nos obliga a

dar un salto decisivo a otra categoría de unidad. Y así, con nueve cifras solamente se organiza la agrupación de las unidades en jerarquías sucesivas que pueden repetirse sin límite. El primero de cada jerarquía es un uno de mayor dimensión, o lo que es igual, de mayor valor.

C.	D.	U.
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Las tres líneas verticales de cifras, colocadas bajo las letras C. D. U. indican jerarquías diversas de unidad. Por ejemplo : unidad simple en U ; decenas en D ; centenas en C. son, sin embargo, siempre las mismas cifras las que las representan sin otra diferencia que su posición. Es pues, la posición jerarárquica de las cifras la que indica los diversos valores correspondientes, pero, en cuanto al valor absoluto se refiere, es el mismo en las tres posiciones indicadas. Existe, pues, un valor absoluto en el sistema decimal que no varía con el relativo representado por las cifras ; se pueden, pues, sumar los números de la línea C con la misma facilidad que los de la línea U y el contar o el calcular está siempre limitado entre aquellos pocos números, es decir, del uno al nueve. En efecto, si se considerasen los maestros como unidades simples, los directores como decenas y los inspectores como centenas, no se tropezaría con mayor dificultad para contar nueve inspectores que para contar nueve maestros. Lo único que los diferencia es su diversa importancia social, pero esto no influye en la materialidad de contar de uno a nueve.

Siendo así, precisa, ante todo, situar las jerarquías y darse cuenta exacta de la importancia, de su «valor», para no sufrir error, para no cometer la falta de tratar un inspector como simple maestro o la torpeza de dirigirse a un maestro como si tuviera las facultades de un inspector. Todo ello pues, se reduce a dos cosas fundamentales ; el salto de una jerarquía a otra, cuyo secreto está en el 10 y la exacta apreciación de las jerarquías de los números.

La diversa posición de los números se denota colocando, sucesivamente, un cero a cada salto jerárquico ; uno, diez, ciento, indican posiciones como las señaladas en las líneas U. C. D.

Hacer asequible a los niños el sistema decimal, por medio de un material, es cosa clara y práctica y de una simplicidad, tan evidente, que el sistema decimal puede convertirse en un juguete propio para niño. Sin embargo, no es un juguete que se le ofrece, sino un material exacto de estudio que hará superar todas las dificultades que encuentran los niños en las escuelas corrientes, donde se enseña a contar y calcular sobre la base del sistema decimal, sin proporcionarle los conocimientos sobre los cuales aquél se edifica.

EL MATERIAL DEMOSTRATIVO DEL SISTEMA DECIMAL

El material que proporcionamos a los niños, para hacerles comprender el sistema decimal, es triple ; está compuesto : de objetos, de cifras numéricas y de palabras.

Los objetos son perlas de color.

Por ahora nos ocuparemos, solamente, del que sirve para demostrar prácticamente la construcción del sistema decimal.

Consiste en perlas sueltas y además en pequeños bastones de diez perlas, enfiladas y fijas sobre un alambre.

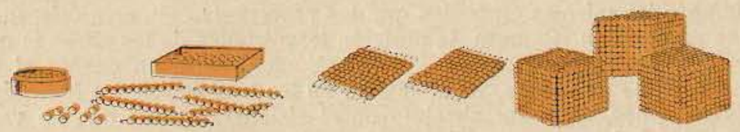


Fig. 5
Material del Sistema Decimal
(elementos)

Además existen los cuadrados de perlas construídos con diez bastones de los anteriores, unidos entre sí y formando un solo objeto, que es un «cuadrado de diez» o sean cien perlas. Y finalmente, un cubo construído colocando uno sobre otro, diez de los cuadrados anteriores, convenientemente ligados y constituyendo un solo objeto (fig. 6). Se da un solo cubo de perlas como punto de llegada y límite del sistema.

De cada uno de los objetos indicados en los primeros tres grados, existen en número de cincuenta y cinco que es, precisamente, la suma de las unidades contenidas en la serie numérica de uno a nueve. El material se dispone del modo siguiente (fig. 7).

Unido al material de perlas está el de cifras. Este consiste en una serie de carteles, cuyas dimensiones, son proporcionadas a la jerarquía de los números, y para las varias jerarquías, tienen los números distintos colores. Los pequeños carteles para las nueve unidades son iguales entre sí e idénticos en un todo a los usados en la primera numeración (en la que se utilizaban los bastones de madera) ; los carteles para las nueve decenas, en cambio, tienen doble anchura, porque

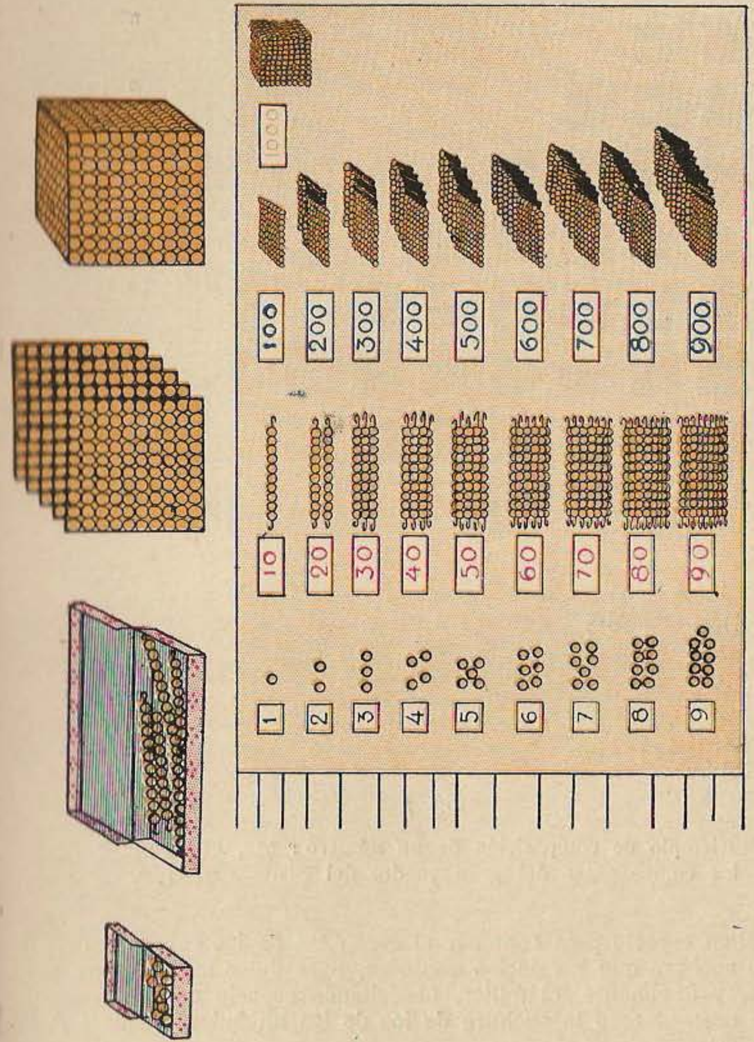
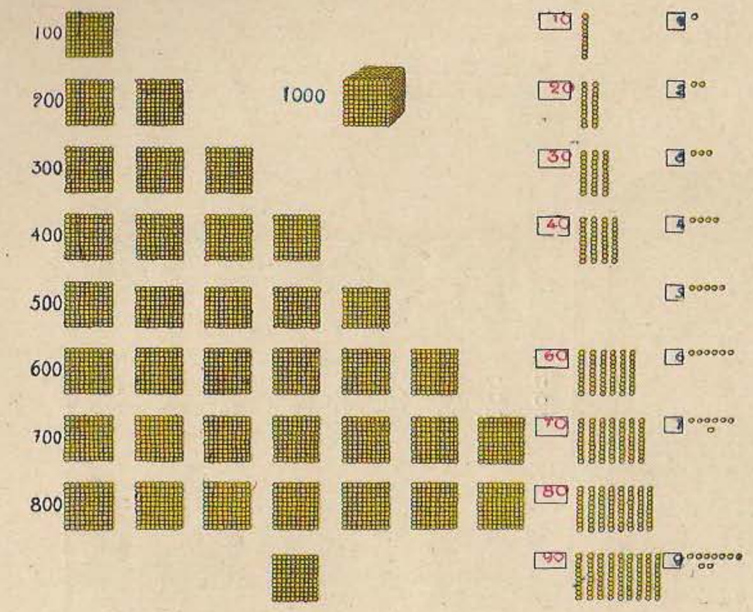


Fig. 6
Exposición del Sistema Decimal en su totalidad



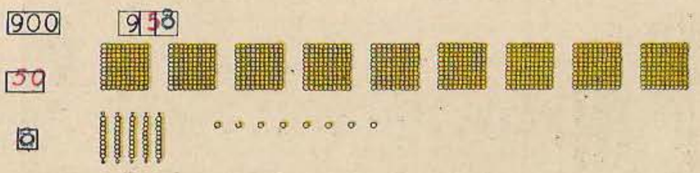


Fig. 7

Ejemplo de composición de un número: 958, utilizando los componentes del gran cuadro del Sistema Decimal

necesitan espacio para contener el cero; los de las centenas tienen triple anchura que los de las unidades, para dejar espacio para dos ceros, y finalmente, el millar, necesitando espacio para tres ceros tiene cuatro veces la anchura de los de las unidades (cuadros A-B pág. 25).

Los dos materiales, es decir, las perlas del sistema decimal y los carteles, se prestan a combinaciones fáciles y claras que ofrecen la posibilidad de un trabajo riquísimo en ejercicios y por ello a un lar-

go estudio. Se explica como, una vez despertado el interés, el sistema decimal presentado en esta forma se convierta en fuente de actividad.

Uno de los ejercicios más sencillos es el de componer *separadamente* cuadros portátiles, colocando en fila las cantidades de la misma jerarquía y los números correspondientes de los carteles, según indica la figura 6, que los presenta todos en un conjunto.

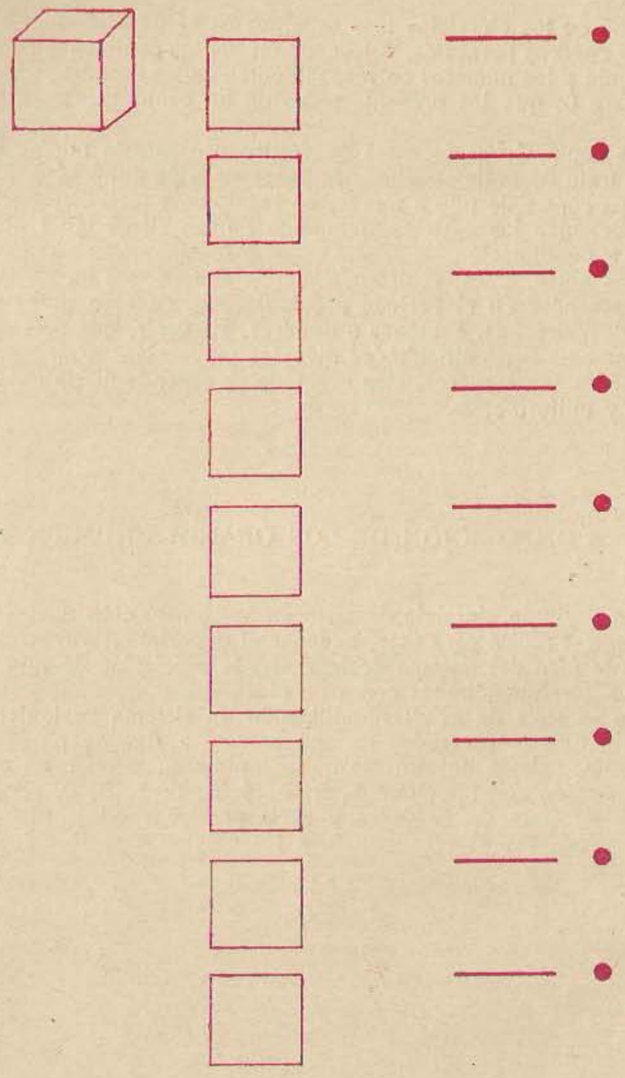
La composición de estos cuadrados presenta la misma facilidad, ya se trate de perlas sueltas, de bastones o de cuadrados. Y cuando se sepa contar de uno a nueve, es igualmente fácil disponer uno debajo del otro los carteles, tengan o no las cifras igual número de ceros a continuación.

Los niños, pues, realizando ejercicios análogos en un todo a los ya expresados en el período preescolástico, cuentan indistintamente unidades, decenas, centenas o millares. Es decir, que esta operación de contar no tiene dificultades diversas y sucesivas a medida que las cantidades son mayores, sino que todo se aprende de un modo simultáneo y uniforme.

COMPOSICION DE LOS GRANDES NUMEROS

Un segundo ejercicio consiste en la composición de los grandes números. Precisa para esto, exponer el material en forma que reproduzca la *idea* del sistema decimal, no la asociación de números con objetos correspondientes como en el cuadro 6.

No se trata de «contar» utilizando un sistema cualquiera, si no que, lo que se pretende, es representar la idea de que para cada jerarquía, existen únicamente nueve unidades, lo cual, no puede ser representado con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, porque solamente se trata de *unidades* y sería preciso escribir filas de uno. Pero puede ser representado con los objetos, con la siguiente disposición.



En cambio, usando la serie de cifras, se indican las sucesivas agrupaciones desde el 1 al 9, ya sea con los carteles superpuestos, (A) o bien, separados (B), como indica la siguiente figura.

(A)

1	1	1	1
	2	2	2
	3	3	3
	4	4	4
	5	5	5
	6	6	6
	7	7	7
	8	8	8
	9	9	9

B

1000	100	10	1
	200	20	2
	300	30	3
	400	40	4
	500	50	5
	600	60	6
	700	70	7
	800	80	8
	900	90	9

Dada esta separación entre cifras y objetos, se puede proceder a una *asociación* entre sí, demostrando que cualquier número, (en nuestro caso del 1 al 1999) se puede componer con el limitado número de objetos expuestos en el cuadro 8. Con ello se demuestra la clave compleja del sistema decimal.

Enunciamos un número, por ejemplo, nuevecientos cincuenta y ocho. Este se puede componer sacando del cuadro del sistema decimal las cantidades correspondientes ; o sea

9 cuadrados de perlas (ciento)
5 bastones (diez)
8 perlas sueltas que se encuentran alineadas en la octava línea del cuadro de las unidades simples.

Por lo que se refiere a los carteles de los números correspondientes, la selección es aún más sencilla.
Si se superponen después los carteles, de modo que cada número ocupe el lugar que le corresponde, es decir ; que el cincuenta cubra los dos ceros de la centena y el ocho el de la decena, resulta el número siguiente :

958 que se descompone en 900
50
8

He aquí pues, cómo, de una manera clara, se lleva a cabo la descomposición de los grandes números, tanto por lo que se refiere a las cantidades efectivas con los relativos agrupamientos de unidades según el sistema decimal, como por lo que se refiere a los símbolos numéricos que representan. Los números, después, se descomponen distinguiendo los millares, las centenas, las decenas y las unidades y así resalta el hecho de que cada gran número es una suma de grupos, representado cada uno por las cifras que están una junto a otra.

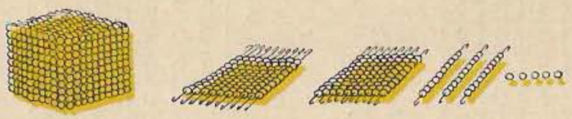


Fig. 8
Composición del número 1235

Véase el número: 1235 representado por el material (fig. 8) y por los carteles (fig. 9).

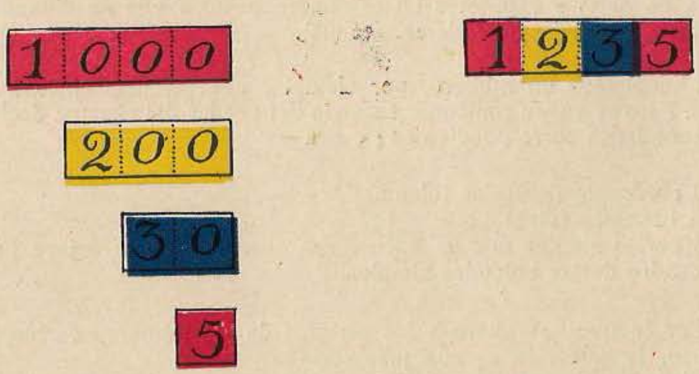


Fig. 9

Es la posibilidad de llegar pronto a los grandes números, o mejor, de comenzar por los grandes números, lo que despierta un inten-

so interés. El poderlos componer y analizar, moviendo los objetos, incita a la repetición del fascinador ejercicio.

El sistema decimal, presentado en su conjunto, es una especie de red fundamental sobre la que se desarrollan, poco a poco, las particularidades que aclaran y facilitan cada vez más su estudio. De igual modo que quien debe llevar a cabo un fino bordado comienza por el dibujo en su conjunto y después va rellenando con los detalles.

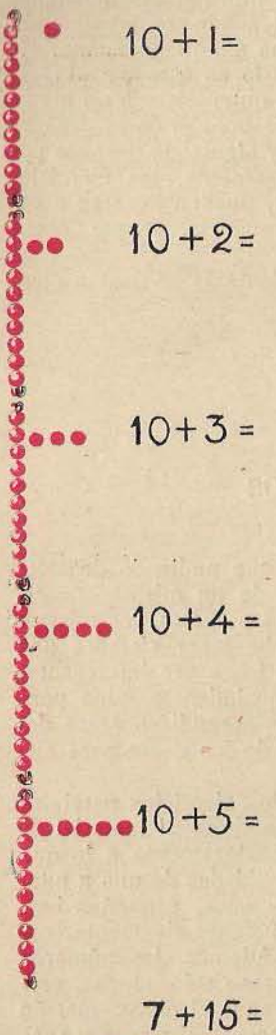
El estudio de los detalles puede ser hecho simultáneamente. No precisa una sistematización ; lo único necesario es estudiar «todos» los detalles. Así, volviendo al mismo ejemplo, quien ejecuta un bordado, dibujado en su conjunto, puede principiar por donde le parezca más conveniente ; comenzando por una parte y siguiendo después por otra que no esté ligada con aquélla. Análogamente, los ejercicios de detalle que se refieren al sistema decimal, pueden llevarse a cabo simultáneamente, sin necesidad de precedencia, porque están guiados por un conjunto preestablecido.

Los ejercicios que se llevan a cabo paralelamente se llaman ejercicios paralelos.

EJERCICIOS PARALELOS

Se llaman pues, ejercicios paralelos, los que pudiendo desarrollarse simultáneamente se refieren a detalles de un mismo conocimiento fundamental o aspectos diversos, bajo los cuales, los mismos detalles pueden considerarse. El ejercicio debe tener siempre una finalidad determinada en sí mismo, para que logre ser interesante. Ello sirve, no sólo para profundizar los conocimientos, sino para hacerlos más claros, mientras que los detalles aprendidos fuera del conjunto a que se refieren, servirían los más de las veces para enturbiar la visión de ese conjunto.

El paso de una a otra decena.—Uno de los ejercicios paralelos consiste en ilustrar los pasos de una decena a otra. El material de perlas adaptado a este ejercicio representa (análogamente a lo que representaban los bastones) los grupos de las unidades de uno a nueve, reunidos en un conjunto indisoluble. Hay pues, pequeños bastones de dos perlas, de 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 respectivamente, enfiladas en un alambre que reune el grupo. Además, los números están representados por perlas de diversos colores ; rojo, el uno, verde el dos, negro el tres, amarillo el cuatro, azul el cinco, marrón el seis, blanco el siete, morado el ocho, azul oscuro el nueve y anaranjado el diez. De ese modo todas estas perlas tienen una apariencia distinta de los pequeños bastones de las decenas, que son todos de color anaranjado y que se utilizaron para construir el gran cuadro del sistema decimal donde, no los colores, sino la forma de agruparse (punto, línea, cuadrado, cubo), constituyen el medio de distinción.



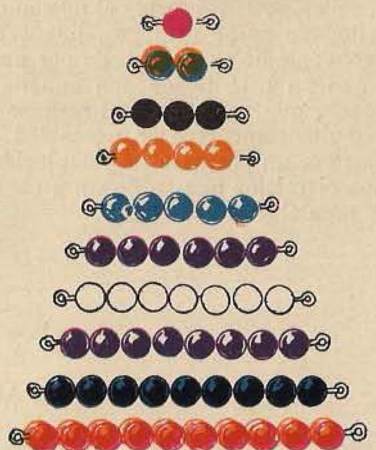


Fig. 10

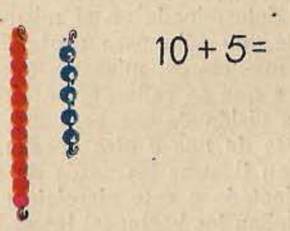


Fig 11 (a

Fig. 11

El primer ejercicio consiste en la construcción del cuadro, que comprende las combinaciones de la decena con los varios grupos de unidades ; es decir, junto a los pequeños bastones de decenas, colocados uno debajo del otro se colocan, primero la perla de la unidad y después, la serie de los pequeños bastones inferiores a diez en su sucesión natural.

Aquí se ve claramente que más allá del nueve no hay combinación posible entre la decena y los grupos de las unidades ; pero comienzan a acumularse sobre la decena y entonces hay que concluir colocando dos bastones anaranjados, uno junto a otro.

Un ejercicio equivalente se lleva a cabo con las cifras. El material consta de una serie de nueve dieces escritos uno debajo del otro dentro de un marco (fig. 12 (a) ; en el fondo queda un espacio vacío. Anexos a este cuadro existen una serie de pequeños cartones suficientes para cubrir el cero de los dieces, que se pueden colocar dentro del marco, introduciéndolos a través de un lado de éste que presenta una hendidura ad-hoc. Existe, además, un cartel donde está escrito el número veinte. Se coloca el cartel del uno sobre el cero del primer diez, el del dos sobre el cero del segundo, etc., hasta que cubierto con un nueve el último cero, no existe otra cifra para combinar con el diez. A partir de aquel instante, sólo procede un cambio total. El espacio vacío ha de cubrirse precisamente con el veinte.

Se ha pasado a otro grupo de decenas.

11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Fig. 12

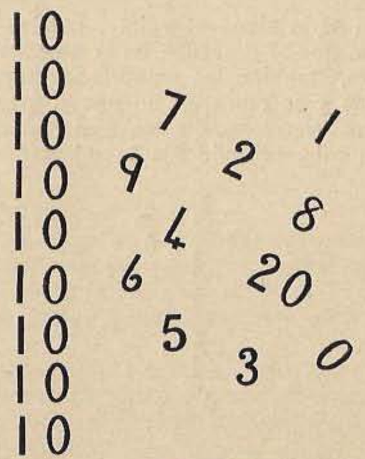


Fig. 12 (a

LAS PALABRAS

Al anterior ejercicio hay que asociar el conocimiento de las palabras. La máxima dificultad de los términos es la relación a este grupo de paso del diez al veinte, porque la composición de las palabras que se refieren a la decena y a las unidades que a ella se unen, oculta los términos componentes haciendo en la fusión palabras nuevas. Por ello, esta parte puede ser enseñada de memoria, valiéndose de ejercicios de composición de palabras realizadas por medio de pequeños carteles en que la sílaba *ce* está siempre compuesta en el mismo color, mientras que las otras partes de la palabra (que indican el grupo de unidades que está asociado a la decena) está compuesta con color diverso. Esto hasta el número quince, pues a partir del diez y seis se invierten los términos.

De este modo tendremos:

rojo		*negro*	*negro*				*rojo*
on	—	ce	diez	—	y	—	seis
do	—	ce	diez	—	y	—	siete
tre	—	ce	diez	—	y	—	ocho
cator	—	ce	diez	—	y	—	nueve
quin	—	ce					

A la serie sigue el veinte, palabra que se diferencia en absoluto de las que le preceden en la numeración. A continuación del nueve, pues, también las palabras demuestran que el paso gradual ha concluído y se entra en un nuevo grupo.

Otros ejercicios.—Otro ejercicio análogo es el que puede llevarse a cabo dejando fija la misma decena y sustituyendo junto a

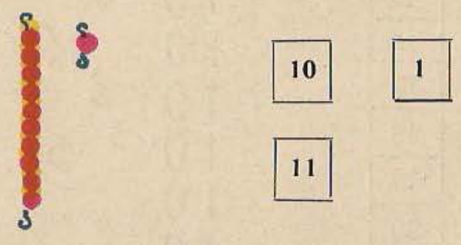


Fig. 13

ella los grupos sucesivos de las unidades. Este ejercicio puede realizarse con las perlas y también con el sistema de los bastones. En todo caso y para hacerlo interesante precisa el que se le acompañe de los carteles. Se usa para ello una parte de los carteles que pueden superponerse, es decir, el diez y todos los carteles de las unidades, desde la unidad hasta nueve. Cada sustitución de la cantidad está acompañada de la correspondiente sustitución de las cifras.

Se coloca, pues, una perla encarnada junto a un pequeño bastón de diez, mientras en el cartel del diez el cero se cubre con el cartel del uno y, de ese modo, se siguen efectuando las simultáneas agregaciones y sustituciones; es decir, permaneciendo fijo el bastón de diez se cambia la perla del uno con la pequeña asta del dos, mientras por otra parte, sin tocar el cartel del diez, viene a cubrir el cero el cartel del dos, y así se procede uniformemente hasta el nueve

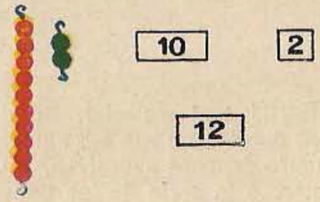


Fig. 14

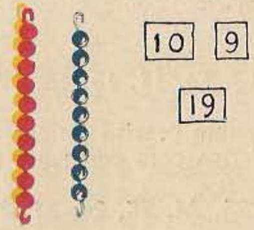


Fig. 15

Al llegar a dicho límite no se puede continuar del mismo modo, porque el pequeño bastón o asta siguiente al de nueve, no es sino una nueva decena que se coloca junto a la primera y en cuanto a los carteles, precisa dar de lado a los usados hasta entonces, para buscar el de 20.

Todos los ejercicios anteriores refuerzan el concepto clave del sistema decimal que actúa sobre el punto de paso de una decena a otra, del nueve al diez. Después del nueve el puente ha concluído: es la nueva decena que comienza.

He aquí un material, todo de cifras (fig. 17) que sirve, precisamente, para probar una y otra vez el mismo hecho. Constta de dos marcos iguales como indica la figura ; la separación en dos partes está hecha para hacer más visible toda la serie y también para ma-

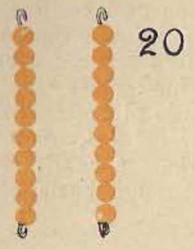


Fig. 16

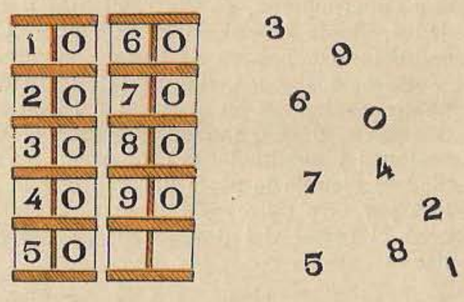


Fig. 17

nejar con más facilidad el material. En un marco están dibujadas las cinco primeras decenas, o sea los números 10, 20, 30, 40, 50 y en el otro las cuatro decenas sucesivas, 60, 70, 80, 90. Acompaña al material de marcos la serie de los nueve pequeños carteles que llevan las cifras de las unidades. Estos se pueden hacer resbalar dentro del marco para cubrir el cero. El ejercicio consiste en contar, sustituyendo las nueve cifras de los pequeños carteles, según el orden material numérico, sobre el cero del diez para formar sucesivamente los números

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

Al llegar a este punto precisa formar el veinte y comienza de nuevo en la misma forma para componer sucesivamente los números

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y así sucesivamente hasta el fin.

Son siempre los mismos pequeños carteles los que sirven de puente entre el 10 y el 20, como entre el 20 y el 30, como entre el 80 y el 90. Cuando se llega al noventa y nueve no es posible continuar con el material. Los cuadros son demasiado estrechos y el número siguiente—el 100—constando de tres cifras no cabría. Aquella unidad que falta y que nos hace detener es una clave más importante que la que nos permitía últimamente el paso de una a otra decena. Aquí se trata también de un simple *uno*, pero esta unidad no hace saltar, de una en una, las decenas, sino que lleva consigo una entera jerarquía que requiere para sí mayor espacio. Es el paso de las decenas a las centenas.

Las decenas que se siguen una a otra son las que guían. Y también las palabras demuestran ; diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa. En cambio, los puntos de paso—salvo entre las dos primeras decenas, que por ello han exigido un estudio aparte—se distinguen con palabras uniformes correspondientes a la unión sucesiva de las nueve unidades junto a cada decena ; veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, etc. Y así se repite sucesivamente para cada nueva decena, justamente como sucede para la sustitución de los nueve pequeños carteles ; cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete, ochenta y tres, ochenta y seis. Una verdadera suma de palabras.

Los precitados ejercicios aclaran y facilitan, pues, no sólo la comprensión del sistema decimal, sino también el mecanismo de contar, el cual, debe hacerse sobre la base del gran cuadro del sistema decimal mostrado al principio, y los pasos, no son sino detalles, puentes uniformes que van de uno a otro grupo. Es la serie del uno al nueve que actúa y una vez estudiado el mecanismo no hay más que repetirlo ; los grupos jerárquicos que representan el fundamento y la guía de la numeración deben, por ello, ser estudiados antes y en sí mismos. Entonces, la operación de contar será cosa sencilla e inconfundible.

En cambio, en las escuelas corrientes se enseña a contar linealmente, sin poner de relieve los puntos fundamentales y haciendo oscuro y fatigoso dicho ejercicio. Se dice, por ejemplo : «Tal niño cuenta ya hasta cuarenta y cinco, este otro, en cambio, no pasa de treinta y dos. Acaso a fin de año podrá llegar hasta el ciento».

El avance es lento y penoso, el camino es difícil como para quien sigue de noche un estrecho sendero de montaña. En cambio, la visión del sistema en conjunto, separada de los «puentes de paso» da la impresión de mandar un ejército disciplinado en una llanura iluminada por el sol.

Contar linealmente es un ejercicio paralelo.—Contar linealmente es interesante sólo para la inteligencia que posee ya el cuadro dirigente del grupo de las jerarquías decimales.

Partamos de los puntos fundamentales de las jerarquías considerando las unidades que dominan las series del sistema ; uno, diez, ciento, mil.

Para el uno, tenemos una de las perlas de color anaranjado ; para el diez un pequeño bastón de perlas ; para el ciento, un cuadrado construído con diez pequeños bastones de perlas, y para el mil, el cubo construído con diez cuadrados.

Descomposición lineal del cuadrado. La cadena del ciento. — Si en vez de tener las decenas unidas en un cuadrado, las soltamos, conservándolas unidas solamente por las extremidades, obtendremos una *cadena* de cien perlas subdividida en decenas, es decir, en pequeños bastones que se suceden.

La *cadena del ciento* impresiona por su longitud más que el cuadrado por su superficie. Aquella representa el camino de las unidades que van, a través de las decenas, a constituir la centena.

Las unidades pueden contarse *una a una,* efectuándose de este modo la numeración lineal ; uno, dos, tres... nueve, diez, once, doce... treinta y ocho, treinta y nueve, cuarenta, cuarenta y uno... noventa y nueve, ciento.

Es evidente que, conocida la clave de los «pasos» no existe mayor dificultad para contar entre el noventa y ciento que entre el treinta y el cuarenta.

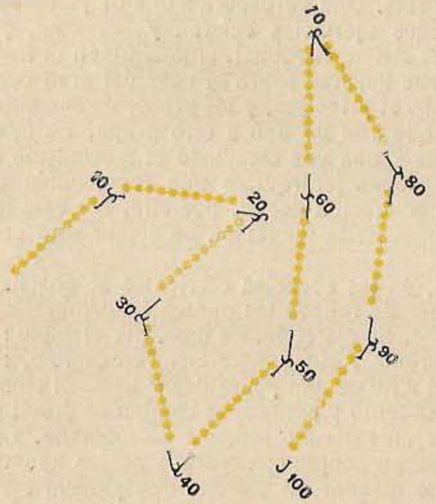


Fig. 18

La descomposición lineal del cubo. La cadena del millar. — El cubo de mil perlas puede descomponerse en diez cuadrados y cada uno de éstos en diez bastones de diez perlas cada uno. Dejando éstos unidos por las extremidades solamente, resulta una cadena larguísima que da una impresión de la cantidad—el millar—más exacta que el cubo. Especialmente, si se compara es'a cadena del millar con la de la centena se ve, claramente, la diferencia entre el cuadrado y el cubo.

Doblando diez veces la cadena del millar y estableciendo el parangón con las decenas, resulta la apariencia de diez cuadrados. Si en la proximidad se coloca la cadena del ciento, se ve cómo, a cada bastoncillo de ciento, corresponde un cuadrado en el mil.

La reacción sorprendente de los niños ante este material, es, su constancia en contar exactamente unidad por unidad la cadena del millar. Siendo demasiado larga la operación para realizarla de una

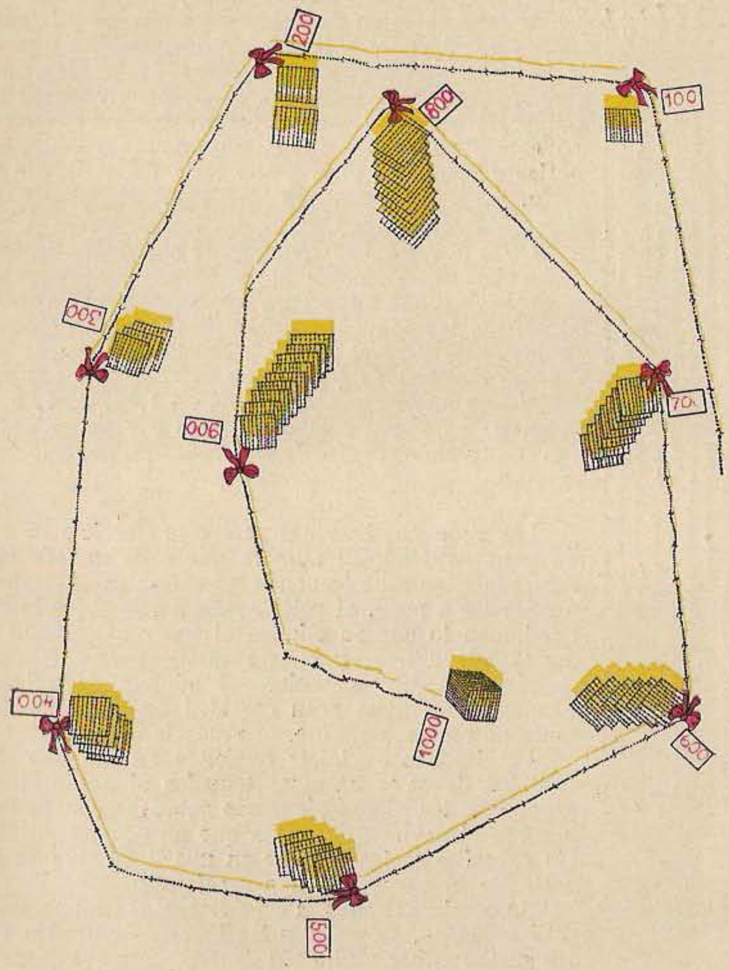


Fig. 19 (1)

vez, los niños la interrumpen, pero no la abandonan. El mismo día, o al siguiente, reanudan la operación a partir del lugar en que habían quedado y siguen contando hasta el fin.

Aquella sucesión de decenas y centenas y la suma de las unidades, una tras otra, les interesa vivamente. Cuentan y cuentan sin cesar desde uno, dos, tres... cuarenta y cinco, cuarenta y seis... trescientos quince, trescientos diez y seis... hasta novecientos noventa y nueve, mil ; cogiendo entre sus dedos una perlas después de otra, como las cuentas de un rosario.

Otros ejercicios paralelos sobre el sistema decimal. —Un ejercicio que puede llevarse a cabo paralelamente al anterior y que sirve para que se hagan casi mecánicamente las pequeñas sumas de unidades preparando los niños para el cálculo mental, se hace por medio del material de perlas que representa los grupos numéricos inferiores a la decena — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, — y que está constituído por perlas enfiladas en alambre, ofreciendo cada grupo un color diverso.

Los pequeños bastones para este ejercicio se usan en gran cantidad. El número que cada uno de ellos representa, se sabe contando las perlas en él enfiladas pero, poco a poco, el color ayuda a reconocer la cantidad, con lo que se elimina el tener que contar las perlas una a una, y cada pequeño bastón indica a simple vista—por su color—el número de unidades que contiene. Esta gran cantidad de pequeños bastones no representa, sino, una mezcla de nueve cifras.

El ejercicio se inicia poniendo en fila una gran cantidad de estos bastones tomados al azar entre el grupo ; se les alinea bien, sea sobre una mesa larga o sobre el pavimento y para que no ocupen un espacio excesivo se les dispone en una línea sinuosa que recuerda el cuerpo de una serpiente.

Se comienza, pues, a contarlos, y apenas se suman diez unidades, se separan los bastones sumados y se les sustituye por un bastón de diez, que son como sabemos, de color anaranjado. Después y a partir del diez se cuenta nuevamente hasta sumar otros diez y he aquí que otro bastón de color anaranjado viene a sustituir los bastoncillos sumados que se separan de

Fig. 19 (2

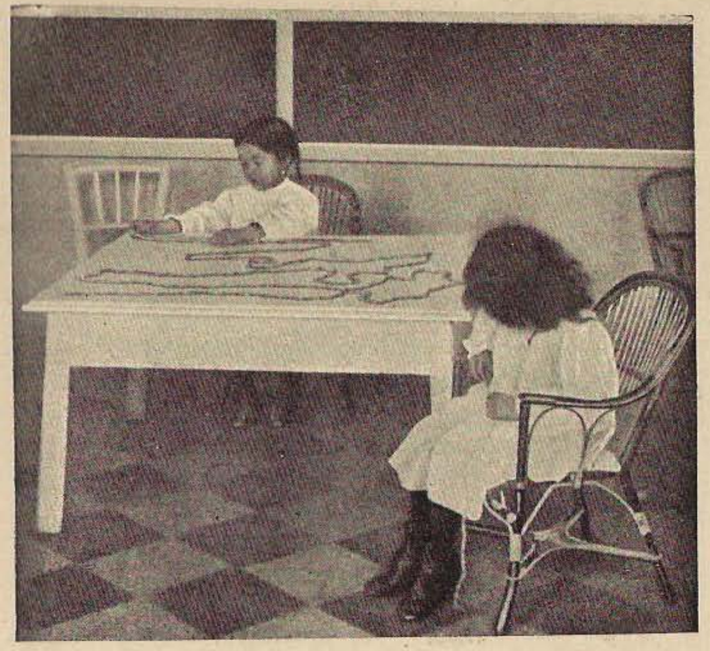


Fig. 20
Una niña cuenta la cadena del millar sobre la mesa, otra sentada en la silla cuenta la de ciento

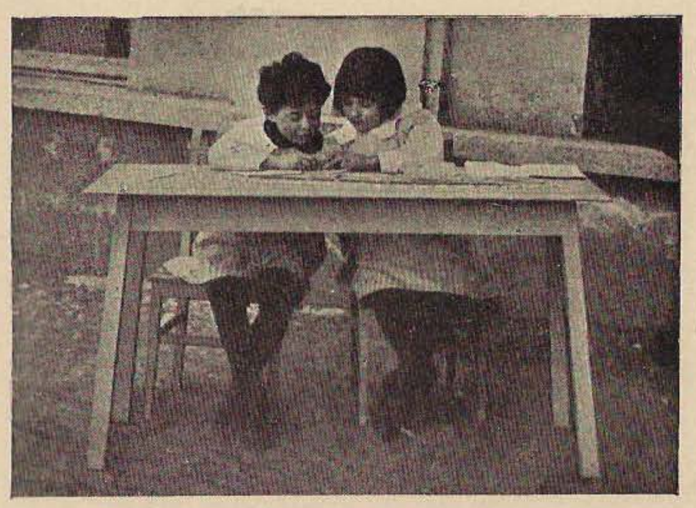


Fig. 21
Comprobando el cálculo sobre la cadena

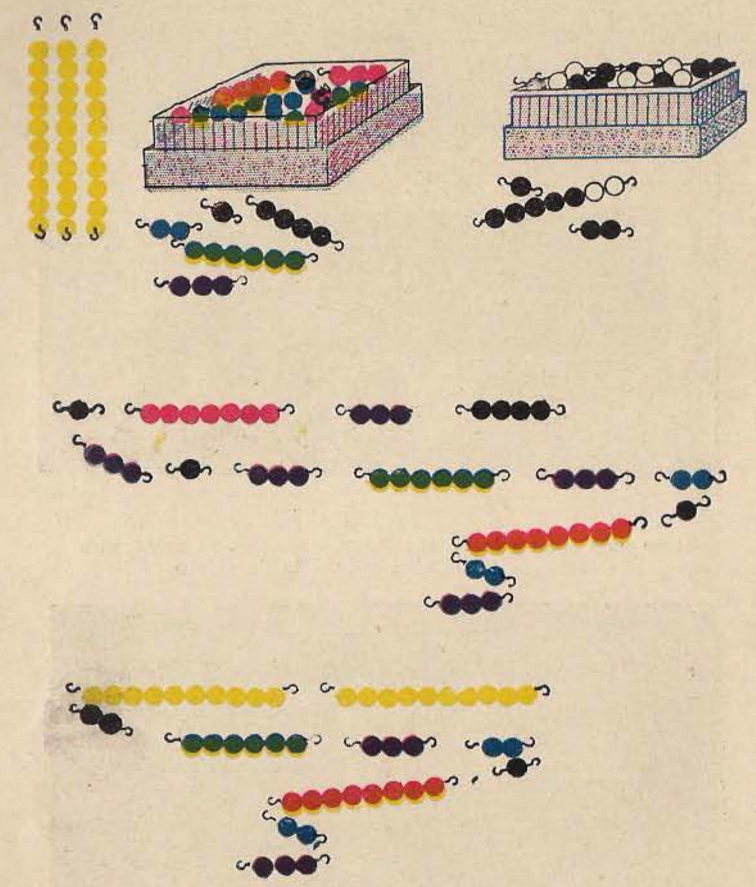


Fig. 22

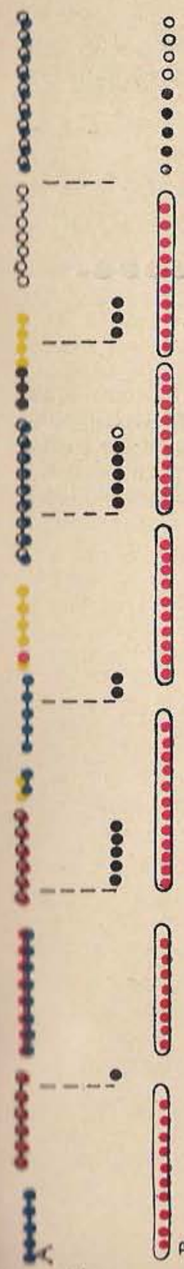


Fig. 23

la figura de serpiente y así se prosigue hasta el fin. Se ve, entonces, que el color anaranjado va devorando aquella fila multicolor y que bastones de igual longitud, todos ellos, van ocupando el lugar de los bastones de distinta longitud. En este caso, el contar ha consistido en transformar en decenas las cantidades menores que están destinadas a fundirse en el diez, base del sistema decimal El ejercicio pues, consiste en hacer pequeñas sumas en torno al diez, porque cada vez se vuelve a principiar y no se tienen en cuenta los pequeños bastones de diez que se van acumulando a lo largo del camino. Es, pues, un trabajo siempre uniforme que se repite y que concluye por hacer fácil, rápida y mecánica la suma de cifras inferiores a diez. Pero la memorización se logra a través de un largo trabajo de contar unidades y de comprobación de sumas alrededor del diez, es decir, que obliga a reflexionar y a realizar una porción de pequeñas operaciones, de sustracciones que deben realizarse a la par que las sumas, para calcular el exceso que queda después de constituída la nueva decena. Es sobre este detalle sobre el que se desarrolla el ejercicio a través de las variaciones resultantes de los grupos diversos que se encuentran a lo largo de la línea de bastones.

Hagamos una descripción minuciosa de la forma en que se desarrolla el ejercicio.

Supongamos que la línea comienza con los siguientes pequeños bastones: 5 + 6 Fig. 23 (a. Uno es celeste pálido y el otro marrón; la suma es once. Se separan los dos bastones precitados y se sustituyen por otro 10—color anaranjado—más una perla que completa la cantidad comprendida en la suma 5 + 6. Es decir: 5 + 6 = 10 + 1. Este uno pertenece al 6 que fué quitado juntamente con el 5. En efecto: 6 = 5 + 1 y de los dos sumandos, o partes, el 5 sirve para formar el 10 y el 1 representa el resto. Es decir: 6 — 5 = 1. Este 1 permanece y debe contarse después.

Ahora, prosiguiendo, supongamos que los otros pequeños bastones que siguen a las precitadas sean 8 y 6; uno de color violeta y otro de color marrón. La suma que se presenta primeramente es 1 + 8 = 9 (donde el 1 es el resto del último 6). Como el 9 no llega a hacer precisa la sustitución, se continúa la suma 9 + 6 = 15 = 10 + 5. Se ponen pues, aparte el 8, el 6 y el 1 de resto anterior y se substituye el total por un bastón de 10 más uno de 5. Este 5 es el resto del 6 que se invirtió en completar una decena — 6 = 5. El resto, 5, se sumará a los bastones siguientes y se proseguirá la operación.

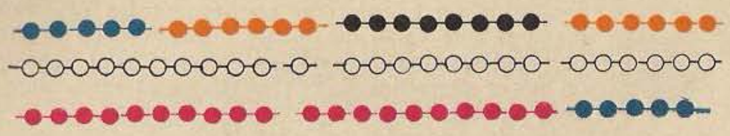


Fig. 23 (a

Estos restos deben ser distintos de los pequeños bastones que constituyen la línea de la serpiente. Representan lo que materialmente se puso aparte (ya que el bastón utilizado parcialmente no se podía romper) pero que queda aún por contar. Para esta representación de restos existe un material complementario que evita toda posibilidad de confusión. Este material consiste :

El uno. — Una perla negra.
El dos. — Dos perlas negras.
El tres. — Tres perlas negras.
El cuatro. — Cuatro perlas negras.
El cinco. — Cinco perlas negras.
El seis. — Cinco perlas negras y una blanca.
El siete. — Cinco perlas negras y dos blancas.
El ocho. — Cinco perlas negras y tres blancas.
El nueve. — Cinco perlas negras y cuatro blancas.

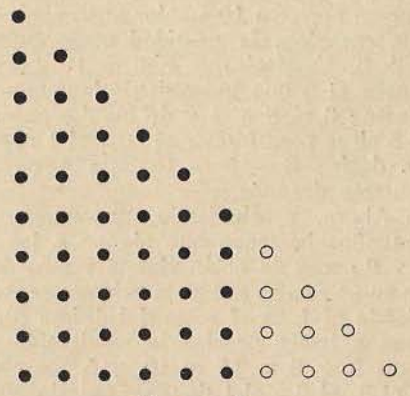


Fig. 23 (b

Esta distribución en blanco y negro facilita la selección de piezas, que se recononcen a primera vista.

Representemos la continuación de las operaciones en una fila más larga de números :

5 + 6 + 8 + 6 + 2 + 5
+ 1 + 4 + 9 + 3 + 4
+ 7 + 9.

La figura anterior representa los cambios acaecidos en torno al 10. Las cantidades indicadas fueron sustituídas por decenas (línea B) mientras entre ambas líneas se ven los restos de los bastones separados, restos que van sumados en los bastones sucesivos. La suma es 69, es decir : 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9.

Algunas veces, los niños construyen una «serpiente» de gran longitud, correspondiente a muchas centenas.

Cuando el ejercicio ha concluído se van contando los bastones de las decenas, poniéndolos uno junto a otro, verticales, y apenas se reúnen diez bastones, se sustituyen por un cuadrado de cien perlas y así se prosigue hasta el fin. La suma total resalta fácilmente del conjunto de grupos decimales.

Una prueba de la operación realizada, se puede llevar a cabo recogiendo todos los bastones separados y reuniéndolos dos a dos, en forma, que cada pareja constituya una decena. Por ejemplo : los números de la suma 5 + 6 + 8 + 6 + 2 + 5
+ 1 + 4 + 3 + 4 + 7 + 9 se agruparán en la siguiente forma :

5 + 5
6 + 4
6 + 4
8 + 2
7 + 3
9 + 1
9

y en cada grupo se verifica su sustitución por una decena. En este caso se comprueba una perfecta correspondencia :

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9

De este modo se han estudíado todas las descomposiciones del diez, en los dos grupos componentes, repitiendo lo que ya se había hecho con el material de los bastones

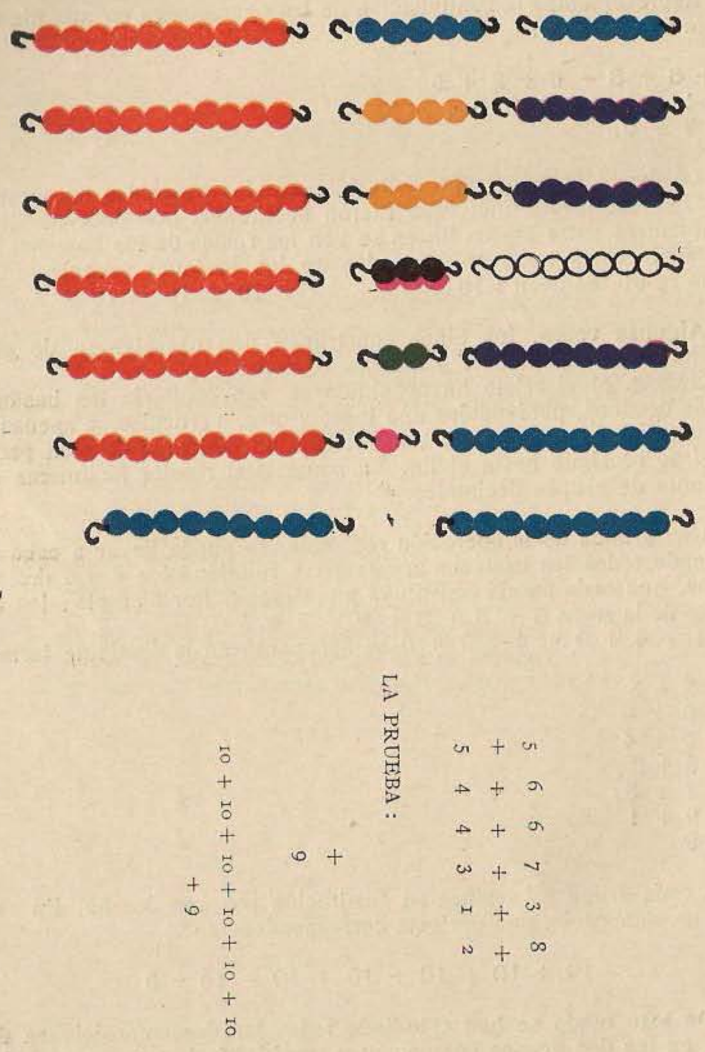


Fig. 24

El ejercicio de la «serpiente» obliga a fijar la atención sobre la dificultad de contar a través del diez ; esta dificultad se repite constantemente, hace avanzar de un modo acompasado, mientras se deja atrás la tranquila y uniforme serie de los dieces. Así se pone de relieve el mecanismo de contar grupos de unidades en el sistema decimal. En los métodos comunes, cuando se suman grupos de unidades que forman acumulaciones de decena, esta acumulación pesada y enojosa se arrastra, lo que hace difícil avanzar. En efecto, cuando en las escuelas corrientes dicen los meastros : «Tal niño ya ha llegado a contar hasta cincuenta», indican el peso de las decenas acumuladas que hizo difícil el proseguir, y el niño que ha llegado a contar cincuenta, se repone evidentemente de la fatiga.

En cambio, la dificultad del cálculo es una sola y es siempre la misma por grande que sea la magnitud de los cálculos sucesivos. Consiste en aquel salto a través del 10 que, como decimos, supone una labor mental ya que exige la realización de aquellas pequeñas sumas y restas que conducen a completar una decena y a obtener el resto que se agrega a los grupos sucesivos. En cambio, la decenas acumuladas detrás, representan un peso muerto que gravita solamente sobre la memoria.

Los largos y reiterados ejercicios sobre la «serpiente» concluyen por hacer mecánica la labor mental en torno al 10 ; poco a poco desaparece aquel lento trabajo de razonamiento y es sustituído por un mecanismo mental. En efecto, las leyes de las actividades razonadoras conducen éstas a salvar aquel trabajo para realizar otros sucesivos, consignando los conocimientos adquiridos en el depósito de las memorizaciones. Ello representa, entonces, una acumulación de riqueza, un progreso real. Las nuevas adquisiciones deben pasar primero por el razonamiento y no ir directamente a la memoria y a sus mecanismos.

Cuando se ha alcanzado aquel grado de madurez mecánica en el cálculo de los pasos a través del 10, los demás acumulados que quedaron atrás pueden ser transportados en su sucesión y de vez en vez, por la memoria, a través de los pasos que no ofrecen ya obstáculo alguno.

En el ejercicio de la «serpiente» los dos trabajos diversos están divididos y ello permite una progresión rápida y sin fatiga que consiente obtener grandes resultados. Las decenas que se acumularon se cuentan después aparte, con placer. porque representan lo fácil después de lo difícil y es casi la compensación de comprobar la propia riqueza después del trabajo.

Cuadro de pasos

Otro material permite estudiar particularmente estos pasos analizándolos.

Se trata de un cuadro dividido en 19 fajas o listas de 19 cuadraditos, con una línea vertical oscura de división entre el 10° y el 11° cuadrado, que divide en dos el total. Las subdivisiones están señaladas por números en la parte superior que, en correspondencia de los pequeños cuadrados, van de 1 a 10 a la izquierda de la línea de división y de 1 a 9 a la derecha. En esta última, además de los números 1, 2, 3... 9, están encima de éstos y en correspondencia con ellos los números 11, 12, 13, 14... 19.

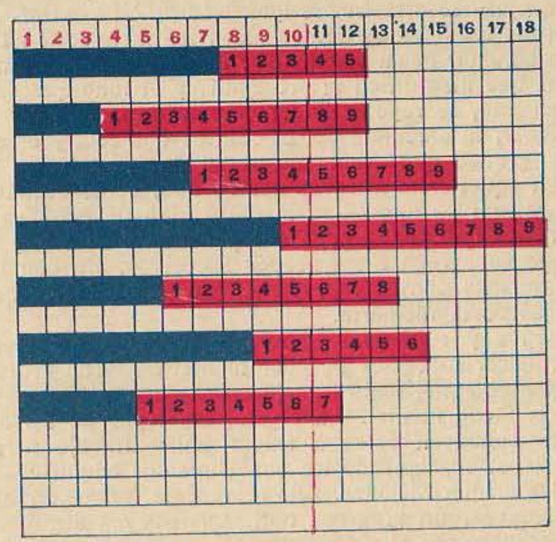


Fig. 25
Ejemplos de adiciones

$7 + 5 = 12$ $5 + 8 = 13$

$3 + 9 = 12$ $8 + 6 = 14$

$6 + 9 = 15$ $4 + 7 = 11$

$9 + 9 = 18$

Este cuadro tiene por objeto, hacer ver, claramente, el paso a través del 10. Le acompaña una serie de listas o fajas de cartón de la altura de los cuadrados y de la misma longitud, que van del 1 al 9, en las que están señalados pequeños cuadrados del mismo tamaño que los del cuadro y una serie de listas de la misma altura y de longitud respectiva, de 1 a 10 cuadrados, en los cuales, no van marcados éstos.

El uso de este material es el siguiente: Se coloca una de las fajas o listas sin señal alguna sobre el cuadro de la izquierda y se

lee la longitud de la faja observando el nivel que alcanza; ocho, por ejemplo. Se pone entonces a continuación una de las fajas que tienen subdivisiones, las cuales se pueden contar; por ejemplo, 6. Se ve que esta faja llega, en la otra parte del cuadro al número 4, o leyendo el número superior, al 14. Se observa de este modo que la suma 8 + 6 es igual a 14.

La faja 6 queda dividida en dos partes por la línea oscura del 10, señalada sobre el cuadro; 2 a un lado y 4 al otro. El 6 pues, ha dado 2 para completar el 10 y sólo han penetrado 4 en la segunda decena.

Así se puede repetir todas las combinaciones posibles y los niños entre 5 y 6 años de edad gustan de escribirlas una a una.

Tablas de cálculo. — Ejercicios escritos

Es, pues, en torno al diez, donde se acumula el trabajo necesario para el cálculo de las sumas. Las sumas parciales de los grupos pueden quedar dentro de la decena, alcanzada o rebasada. Para completar el ejercicio, se ofrece un material escrito que conduce a la memorización necesaria para calcular rápidamente. Una serie de tablas o cuadros están preparados como en la figura 26. Sobre las líneas transversales a la izquierda, se debe repetir siempre el mismo número que viene sumado con números en serie de uno a nueve; a la derecha, se escriben las cifras totales así obtenidas. Los números que se suman cada vez, están también en la serie de uno a nueve. En la figura está el ejemplo de un cuadro llenado con respecto al número 3. Este material de ejercicios escritos, conduce a llevar todas las sumas que son posibles en torno al diez, y que es necesario y suficiente memorizar.

La tabla T. representa el completo de los ejercicios que se pueden llevar a cabo con los carteles. En ella, cada número, desde uno a nueve, está sumado con la serie de los números desde uno hasta nueve.

Observando la tabla T se ve que en cada cuadro existe un total de 10; mientras 10 es el último total hallado en el primer cuadro (del uno) es el penúltimo en el cuadro del dos, antepenúltimo en el cuadro de tres, etc., y se convierte en primero en el último cuadro o sea el del nueve. El 10 está siempre compuesto de la unión de dos grupos que se conocieron ya en el material de los bastones, cuando por desplazamientos se formaban bastones, todos ellos, de la longitud de los «dieces».

$9 + 1 = 10$
$8 + 2 = 10$
$7 + 3 = 10$
$6 + 4 = 10$
$5 + 5 = 10$

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7	7 + 1 = 8	8 + 1 = 9	9 + 1 = 10
1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8	7 + 2 = 9	8 + 2 = 10	9 + 2 = 11
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9	7 + 3 = 10	8 + 3 = 11	9 + 3 = 12
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = 10	7 + 4 = 11	8 + 4 = 12	9 + 4 = 13
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	5 + 5 = 10	6 + 5 = 11	7 + 5 = 12	8 + 5 = 13	9 + 5 = 14
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11	6 + 6 = 12	7 + 6 = 13	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15
1 + 7 = 8	2 + 7 = 9	3 + 7 = 10	4 + 7 = 11	5 + 7 = 12	6 + 7 = 13	7 + 7 = 14	8 + 7 = 15	9 + 7 = 16
1 + 8 = 9	2 + 8 = 10	3 + 8 = 11	4 + 8 = 12	5 + 8 = 13	6 + 8 = 14	7 + 8 = 15	8 + 8 = 16	9 + 8 = 17
1 + 9 = 10	2 + 9 = 11	3 + 9 = 12	4 + 9 = 13	5 + 9 = 14	6 + 9 = 15	7 + 9 = 16	8 + 9 = 17	9 + 9 = 18

Fig. 27 (Tabla T)

3 + 1 = ...
3 + 2 = ...
3 + 3 = ...
3 + 4 = ...
3 + 5 = ...
3 + 6 = ...
3 + 7 = ...
3 + 8 = ...
3 + 9 = ...

Fig. 26

La continuación, o sea :

4 + 6 = 10
3 + 7 = 10
2 + 8 = 10
1 + 9 = 10

no es, sino, la inversa de las combinaciones precedentes, luego sólo quedan aquellas combinaciones que fueron comprobadas con el sistema de los bastones. El hecho de haber bastones rígidos que, se pueden desplazar para formar bastones de diez, aclara este hecho y hace resaltar la diferencia que hay entre nueve combinaciones y el desplazamiento de las partes de una combinación ya existente.

Las combinaciones son lo importante ; por ejemplo 3 + 7 = 10. Si a esto se añade el desplazamiento de los componentes que hace decir 7 + 3 = 10, resulta siempre la misma combinación bajo otro aspecto. Algo así como la misma moneda vista por las dos caras.

Lo que es preciso memorizar es la combinación. Ahora, toda combinación de grupos desiguales es doble, desde el punto de vista del desplazamiento de los componentes. Este duplicado inverso se puede eliminar de un cuadro sintético que indique todas las combinaciones posibles ; lo necesario es suficiente. A dicho fin, en la tabla S colocaremos, ante todo, los cuadros, de modo que el diez de cada uno corresponda sobre la misma línea. Entonces, se hacen resaltar las combinaciones de grupos que no alcanzan la decena y que quedan en la parte superior de la fila 10, sobre los grupos que la superan, los cuales quedan en la inferior y señalaremos con color pálido los duplicados eliminables para que resulten las únicas combinaciones.

En la tabla S. los cuadros dispuestos según la línea del 10, presentan un orden general consistente en esto ; en toda la línea horizontal se encuentran totales iguales. Los nueve cuadros relativos al uno, dos, tres... nueve, presentan inmediatamente encima de diez todas las sumas iguales a nueve y después sucesivamente, a medida que se sube, iguales a ocho, siete, etc., hasta el dos. Y de este modo por debajo de diez, el total de las sumas que se encuentran sobre la misma línea, son sucesivamente iguales a 11 en la primera y 12, 13, 14 etc., hasta 18 en las otras. Estas descomposiciones se realizan repetidas veces en sentido inverso, y distinguiendo las repeticiones—señaladas con color pálido—se ve que éstas van aumentando de número del segundo cuadro en adelante, es decir, que se encuentra una en el cuadro del dos, dos en el del tres, etc., y ocho en la relativa al nueve.

La iniciación de las combinaciones diversas comienza en cada cuadro por la repeticicón del mismo número : 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4 etc., y éstas continúan en sentido vertical hacia abajo. Todas las combinaciones precedentes se encuentran retrocediendo en la línea

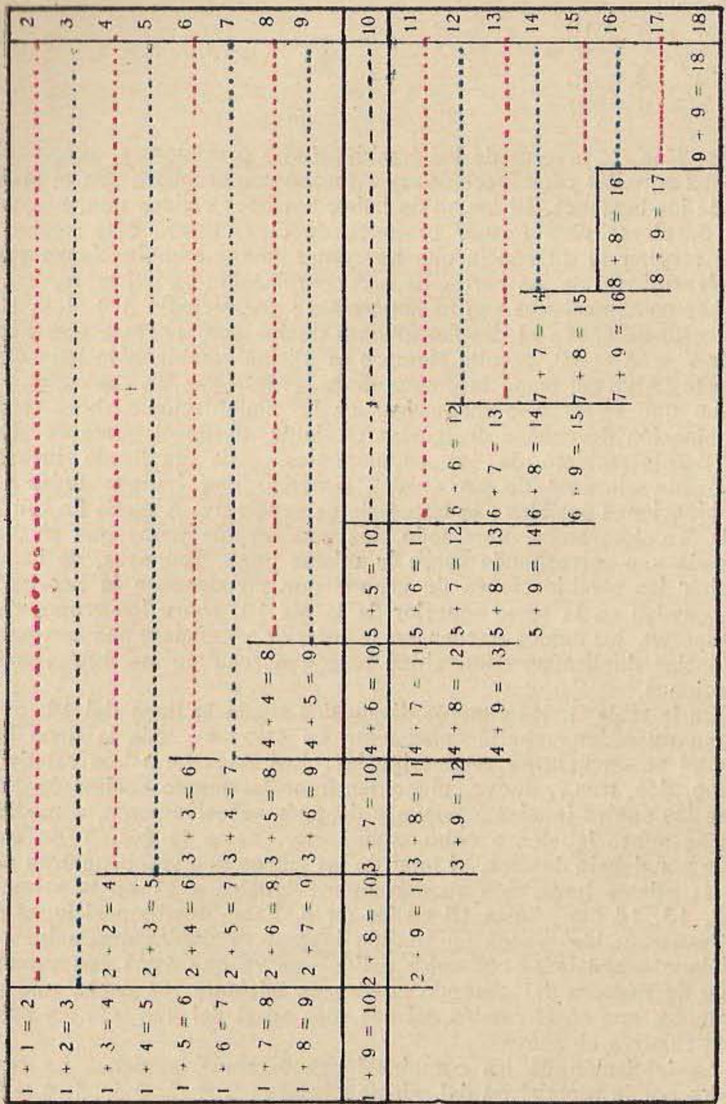


Fig. 28 (Tabla S)

diagonal, pasando de este modo, a través de todos los cuadros, hasta el primero. Por ejemplo:

9 + 9
8 + 9
7 + 9
6 + 9
5 + 9
4 + 9
3 + 9
2 + 9
1 + 9

mientras, en la línea central, por encima de la duplicación, se encuentran las combinaciones repetidas en sentido inverso (señaladas con color pálido) 9 + 9, 9 + 8, 9 + 7, 9 + 6, 9 + 5, 9 + 4, 9 + 3, 9 + 2, 9 + 1. Si se eliminan del cuadro S las combinaciones duplicadas, resulta un cuadro simplificado conteniendo todas las combinaciones posibles, que se puede leer y estudiar como se hace con la tabla pitagórica para las multiplicaciones. A la derecha se encuentra la lista de todos los totales del 2 al 18 y en correspondencia con ellos se observan en línea horizontal las relativas descomposiciones en dos números. Leyendo las sumas que se encuentran, no sobre la misma línea horizontal, sino sobre la columna, sucede que éstas comienzan siempre por un número sumado consigo mismo. Así, por ejemplo, si consideramos la columna 4 + 4, en la columna precedente y en la línea inmediatamente superior se encuentra 3 + 4 = 7 que se puede leer 4 + 3 = 7. Y en la sucesiva columna a la izquierda y en la línea superior se halla 2 + 4 = 6, que se lee 4 + 2 = 6. Lo mismo se puede hacer con todos los números procediendo diagonalmente de derecha a izquierda.

Sumando los de izquierda a derecha, se procede así: sean por ejemplo, las sumas relativas al tres. Se parte del 1 + 3 de la primera columna y se prosigue diagonalmente hacia la derecha de columna en columna bajando siempre una línea: 2 + 3, 3 + 3. Llegados a 3 + 3 se concluye el camino diagonal y se continúa verticalmente sobre la misma columna.

TABLAS CORRELATIVAS

Anotamos, una al lado de la otra, las filas verticales resultantes que dan la suma de la tabla T, fig. 27.

A primera vista parece un ejercicio excesivamente fácil, y sin utilidad alguna, pero, en realidad, constituye uno de aquellos trabajos infantiles que requieren, no sólo paciencia, sino espíritu de ordenación,

2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	11	12	13	14	15	16	17	18

Constrúyase, pues, un marco que contenga la serie de números, desde el 1 al 9 tomando 0 para el ángulo.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Se obtiene así, un cuadro correlativo de las sumas que se pueden consultar, leyéndolo, como se leen las tables pitagóricas : ejemplo 8 + 5 = 13.

Las dos líneas directrices del marco, recuerdan el orden de la primera serie de los números dada a los párvulos de cuatro años de edad : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (*Esta disposición de los ceros, se debe al discípulo holandés E. Vogel*), se hallarán sobre la diagonal el doble de los números del marco, y fuera de ella, no hay más que la repetición geométrica de las sumas que ocupan la primera mitad.

Por lo tanto, no es necesario aprender de memoria más que la mitad de la tabla, esto es, 45 combinaciones.

La tabla puede reducirse así : en ésta los números terminan en su duplicación ; se ven, pues, los números iguales dispuestos sobre N ángulos que cortan en sentido contrario a los de los dobles (Tabla Z).

Para poder leer esta tabla, se lee a la derecha hasta el doble del número del cual se parte, y si el resultado sobrepasa (esto es, si el número que se suma es mayor que aquel que forma la base del cual se parte) se continúa en sentido vertical hasta el nivel del otro número. Ejemplo : 4 + 7, si va hasta el doble de 4 (4 × 2 = 8) se desciende verticalmente hasta la línea 7/ ; la suma es 11.

Si se desea sumar 5 + 8, se parte del doble de 5 (5 × 2 = 10) y después se desciende verticalmente hasta la fila 8, el número hallado es 13.

Efectuando muchas sumas, se halla, que los resultados son siempre números que se encuentran sobre la diagonal números pares, o inmediatamente debajo, números impares. Estas dos filas de números son, por esta razón, suficientes para indicar todos los totales de las sumas hasta el 20 (Tabla Y).

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

1	2								
2	3	4							
3	4	5	6						
4	5	6	7	8					
5	6	7	8	9	10				
6	7	8	9	10	11	12			
7	8	9	10	11	12	13	14		
8	9	10	11	12	13	14	15	16	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla Z

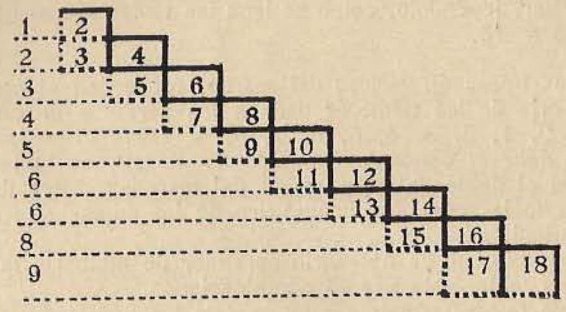


Tabla Y

Sea la suma : 5 + 8. Se sigue horizontalmente hasta encontrar los respectivos números dobles : 10 -16 ; se avanza sobre la diagonal, en sentido contrario en las casillas sucesivas, llegando a 12-14 La suma se halla en la casilla que hay entre 12-14, en los números impares : 13.

Sea la suma 3 + 7. Junto a la doble 6 + 14 se avanza en sentido contrario, y sobre la diagonal, se encuentra una casilla : 10, esta vez el total, por ser número par, se halla, precisamente, sobre la diagonal misma.

Sea 3 + 9. Avanzando entre 6-18, se une a su único número sobre la diagonal 13.

Este ejercicio, transforma la suma de dos números, en la «media» de sus dobles.

Dos pequeños bastoncillos que se separan, dan al ejercicio el aspecto de un juego.

RESUMEN

El primer grupo de ejercicios paralelos sobre el sistema decimal tiene, como finalidad principal, la de ilustrar el paso del 9 al 10, es decir, el puente que se encuentra entre dos jerarquías sucesivas de números. El hecho de contar, que es siempre igual y limitado del uno al nueve en todas las jerarquías de los números, se diferencia por la posición diversa que determinan las mismas jerarquías. Proporciona, además, una idea sensible de las relaciones cuantitativas entre los diversos tipos de estas jerarquías, es decir, entre la unidad, la decena, la centena y el millar, representándoles antes en forma geométrica :

punto ——— una perla aislada.
línea ——— el bastón de diez perlas.
cuadrado — constituído por diez bastones.
cubo ——— formado por diez cuadrados.

Y en forma líneal tenemos igualmente :
la perla
el bastón de diez
la cadena de ciento
la cadena de mil.

Las operaciones aritméticas con grandes números

Cada número mayor que 1 representa en sí mismo una suma de unidad, y existiendo agrupamientos de unidades, un número puede considerarse una suma de sus grupos componentes :

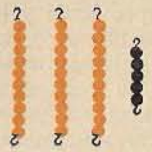
es, 35

453 :

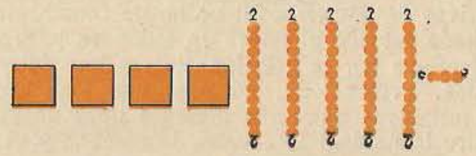
o sea :

1276 :

El hecho de acumular cantidades es verdaderamente cosa sencillísima. Consiste en reunir cosas separadas. Esto se podría realizar con objetos cualesquiera. Pero si se acumulan cantidades numéricas agrupadas según el sistema decimal, entonces aquellas obedecen a la particularidad consistente en la rígida separación de las jerarquías y en el hecho de que 9 unidades, sea cualquiera la jerarquía a que pertenezcan, pueden estar juntas, pero si se agrega otra todavía, sobreviene una síntesis, en virtud de la cual, se forma otra unidad de grado superior. Acumular cantidades numéricas (según el sistema decimal) no es, pues, colocar platos unos sobre otros ni llenar un cesto de fruta Las cantidades numéricas tienen en sí una especie de fermento vital, una fuerza que las obliga a entrar en la forma del sistema (materialización de la abstracción numérica en el sistema decimal). Se podría pensar en la pólvora seca puesta en contacto con pólvora encendida ; de su reunión no resulta un aumento, sino una deflagración, o sea, una transformación. Cuando se trata



Suma 35
Fig. 28 (1



Suma 453
Fig. 28 (2

de cantidades numéricas existe una disposición preestablecida, una especie de disciplina rígida que dispone la acumulación según una ley.

Lo que caracteriza, pues, una operación aritmética, la suma por ejemplo, no es el hecho de acumular cantidades, sino la disposición de las distintas unidades según el sistema decimal. No hay pues nada que aprender en lo que a las operaciones en sí mismas se refiere, cuando al sistema decimal se le da todo aquello que realmente le pertenece.

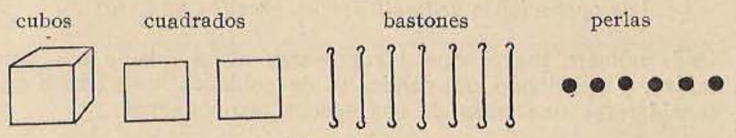


Fig. 28 (3

Las operaciones consisten en acumular cosas desiguales o acumular cosas iguales ;

o en separar de un conjunto alguna de sus partes

o en distribuirlo por partes iguales.

He aquí lo que son las operaciones. Lo que sucede después en la *intimidad* de los números, se refiere al sistema decimal y no a la operación.

Y en el sistema decimal ¿qué sucede?

Esto simplemente. Está prohibida la agrupación de más de nueve ciudadanos, al sobrevenir el décimo surge un nuevo personaje. Es el paso del nueve al diez.

Vamos, pues, a la suma de grandes números. Hay cubos, cuadrados, bastones y perlas sueltas. Todo esto, entremezclado, se halla en poder de varias personas ; varias alumnas de la clase, supongamos.

Andrea tiene 2 cubos, 4 cuadrados, 5 bastones y 6 perlas.

Margarita tiene 1 cubo, 8 cuadrados, 9 bastones y 3 perlas.

Sofía tiene 3 cubos, 4 bastones y 7 perlas.

«Pues bien, hijas mías, haced el favor de depositar en mi mesa todos estos objetos».

Vienen las discípulas y dejan, en montón, sobre mi mesa, cubos, bastones, cuadrados y perlas.

Así ha tenido lugar una *suma*.

Esta es la característica de la suma ; la acumulación de cantidades desiguales.

En efecto. Andrea tiene 2 cubos, 4 cuadrados, 5 bastones y 6 perlas ; lo que constituye el número 2456.

Margarita tiene 1 cubo, 8 cuadrados, 9 bastones y 3 perlas ; o sea, 1893.

Y Sofía tiene 3 cubos, 6 cuadrados, 4 bastones y 7 perlas o sea : 3647.

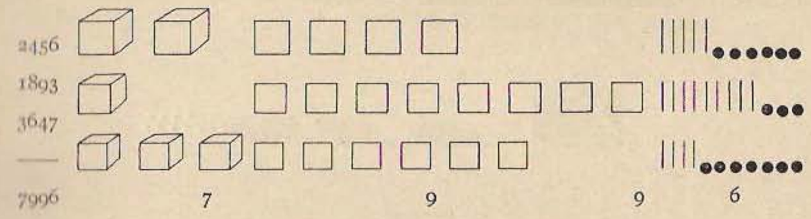


Fig. 29

Han aportado pues, las tres alumnas, cantidades diversas.

Ahora yo, sobre esta acumulación de objetos, que representa efectivamente la suma de las cantidades dichas, opero, ordenándolas según el sistema decimal.

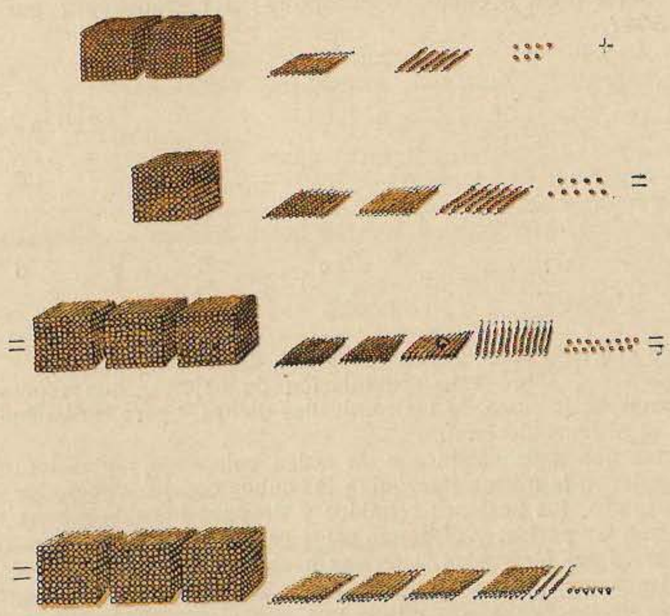
Antes que nada establezco un orden colocando juntos los objetos que tienen la misma jerarquía ; los cubos con los cubos, los cuadrados juntos, los bastones reunidos y después hago la misma operación con las perlas, y dispongo estos grupos en la sucesión correspondiente a sus jerarquías. Una vez hecho esto, precisa obedecer la ley del sistema. ¡No más de nueve en cada grupo! Si se agrega uno, más de los nueve, constituye una unidad completa, que pasa al grado superior.

Veamos ahora lo que resulta de la primera acción de separar en grupos los objetos diversos. Tenemos 2 cubos de Andrea y 1 cubo de Margarita y 3 de Sofía que suman 6 cubos. Hay después, 4, más 8 más 6 cuadrados ; 5 más 9, más 4 bastones y finalmente 6, más 9, más 7 perlas sueltas.

Es lógico comenzar la distribución por las perlas sueltas. Según la ley del sistema decimal, no puede haber sueltas más de nueve y como son 16 ya tenemos formado un bastón y sobran 6 perlas. El bastón, naturalmente, va con sus iguales, porque la división en jerarquías no admite excepciones. Los bastones eran ya en gran cantidad, 18 ; y con el nuevo que se añade suman 19. Es imposible que permanezcan sueltos, así que diez de ellos, constituyen un cuadrado, el cual se une rápidamente con los de su especie y quedan, solamente, 9 bastones.

Los cuadrados eran ya en gran cantidad, 18, y uno que se agrega, 19. Inmediatamente, con diez cuadrados, se forma un cubo que se une a los de su especie y quedan 9 cuadrados solamente. Los cubos eran 6 y con lo agregado se convierten en 7.

Después de esta labor de transformación quedan sobre la mesa 7 cubos, 9 cuadrados, 9 bastones y 6 perlas, o sea, el número 7996.



2157 + 1269 = 3426
Ejemplo de una suma de grandes números ejecutada con el material

Fig. 30

Este es el total que resulta de sumar los números

$$\begin{array}{r} 2456\ + \\ 1893\ + \\ 3647\ = \\ \hline 7996 \end{array}$$

Veamos otro ejemplo en la suma de los númers : 2157 y 1269 ; en la figura está representado la simple acumulación :

3 millares, 3 centenas, 11 decenas y 16 unidades y después los mismos en orden decimal : 3426.

LA MULTIPLICACION

Ahora, sucede que otros tres alumnos tienen cantidades iguales ; cada uno tiene 1 cubo, 3 cuadrados, 9 bastones y 6 perlas.

«Venid y acumulad todo en esta mesa».

Es el mismo caso anterior y no se puede hacer otra cosa que re-

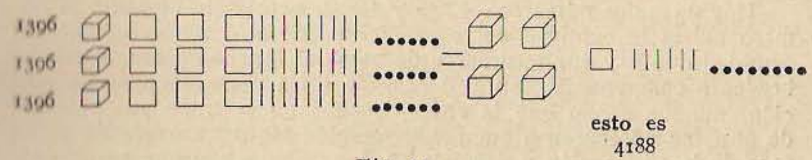


Fig. 31

petir las operaciones descritas. Reunir, pues, todos los cubos, que son tres y todos los cuadrados (que son nueve) ; reunir los bastones (que son veintisiete) y las perlas (diez y ocho).

Del grupo de las perlas sueltas se separa, para reunirse con la jerarquía superior, un bastón que se une a los otros veintisiete, dejando solas ocho perlas.

Y los bastones que son ahora veintiocho se aglomeran en dos cuadrados que huyen para mezclarse con el grupo de nueve. Los cuadrados, pues, se convierten en once. Diez de ellos se erigen en cubo y pasan a la agrupación superior. De aquel número de cuadrados queda uno solamente.

Ahora todo está en orden, según el sistema decimal, y obtenemos como resultado el número 4188.

Ninguna diferencia con el primer caso. En las cantidades destinadas a acumularse, sean iguales o distintas ¿qué importa si no sólo se reunen en un todo, sino que hay una transfusión entre ellas para obedecer a las leyes de su agregación?

No existe diferencia, ni en el hecho de acumular, ni en el hecho de ordenar. No es el sistema decimal quien hace distinta la suma de la multiplicación. Es solamente el hecho que, tratándose de cosas iguales, se puede memorizar su resultado sin contar una cosa después de la otra.

Es, pues, un mecanismo de la memoria del hombre y no un hecho intrínseco de los números, el que establece la separación entre la multiplicación y la suma.

LA SUSTRACCION

La idea, que precisa hacer resaltar y que caracteriza la sustracción, es que existe una sola cantidad efectiva. Yo tengo sobre la mesa un montón de cubos, cuadrados, bastones y perlas, pero quien viene a pedirme una perla trae las manos vacías. Mi montón representa la cantidad efectiva.

Sea ésta, por ejemplo, 4286 ; pero Sofía, que se acerca y me pide mil perlas, no tiene nada más que su petición.

Hay pues dos números : 4286 y 1000, pero, sólo respecto al primero existe la cantidad correspondiente. El otro número indica la cantidad que hay que sustraerse de aquélla. Muchos niños, acostumbrados a componer la cantidad relativa a los números por una adición, aunque sepan que la resta consiste en sustraer una cantidad de otra, se apresuran a componer también las dos cantidades en el caso de la sustracción y después añaden ; ahora hay que restar esto de aquello. El hecho de que, baste reunir la cantidad, sólo respecto al primer número, les sorprende y por eso les interesa, siendo, sin duda este hecho, el que logra mayormente hacer percibir la diferencia esencial entre las dos operaciones. Por ello, si en la adición puede existir una acumulación ilimitada de cantidades que se suman una a otra y pueden existir, por lo mismo, muchos números, aquí existen solamente dos números y una sola cantidad.

En la sustracción indicada, la acción es muy sencilla ; se separa un cubo del montón y se le entrega al peticionario.

$$\begin{array}{r} 4286 \\ 1000 \\ \hline 3286 \end{array}$$

Los ejercicios que se llevan a cabo con el material de perlas para realizar una sustracción, muestran el lado inverso de la clave

del sistema decimal, es decir ; un grupo de la jerarquía superior puede escindirse en diez unidades inferiores, cuando alguna de éstas deba sustraerse al conjunto.

Supongamos que el número que representa la cantidad efectiva sea 1276 y que la cantidad reclamada sea 829.

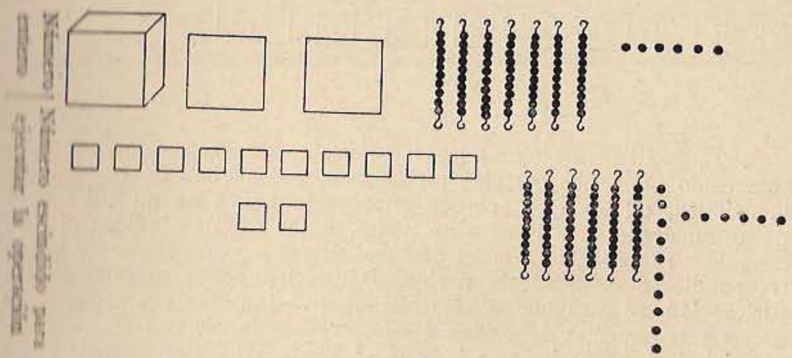


Fig. 32

Al número 1276 corresponde en el material de las perlas un cubo, dos cuadrados, siete bastones y seis perlas. La sola operación que se presenta sencilla es, la relativa a los bastones, porque existen siete y se quieren sustraer dos.

Para obtener las nueve perlas, precisa, ante todo, tomar las que existen : seis. Y para el remanente de tres, hay que deshacer un bastón y obtener de este modo diez perlas sueltas, las cuales, no podrían permanecer en dicha forma si, inmediatamente, alguna de éstas no debiese ser llevada aparte. Tomando de ellas tres, para unirlas a las otras seis, y componer el nueve, quedan siete perlas sueltas. Pero los bastones quedaron reducidos a seis y, aún así reducidos, es fácil separar los dos bastones que hay que sustraer y quedan definitivamente cuatro bastones. Otra dificultad estriba en separar ocho cuadrados cuando solamente existen dos. Pero el cubo superior puede escindirse en diez cuadrados y ceder seis para formar con los dos ya existentes la cantidad solicitada de ocho cuadrados. Quedan entonces del número primitivo, cuatro cuadrados, cuatro bastones y siete perlas (447). La cantidad primitiva fué escindida en dos partes ; la sustraída y la remanente, y esta escisión de la cantidad efectiva en dos partes desiguales, constituye la operación de la resta o sustracción.

Respecto a las transformaciones íntimas de las cantidades numéricas, aquí en la sustracción, en vez de comprobar que diez unidades se funden en una sola unidad de orden superior puede dividirse en 10 de orden inferior. Es, sin embargo, siempre el mismo juego en torno al 10, sea que las unidades se unan o se desunan.

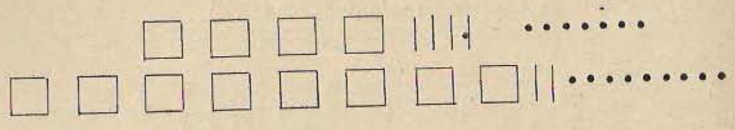


Fig. 33

Para facilitar los ejercicios individuales de sustracción, se han construído pequeños carteles de colores, todos ellos de iguales dimensiones, en los que aparece impresa la figura de un cubo o la de un cuadrado, una línea o un punto. Estos carteles indican el sustraendo y representan billetes que dan derecho a apropiarse de la correspondiente cantidad de perlas. Dados los dos elementos de la sustracción, se compone la cantidad efectiva indicada por el minuendo, con el material de perlas y en correspondencia con él, se colocan debajo los carteles que indican el sustraendo. Por ejemplo; sea la sustracción 2475 - 1836. Dispuesto en fila el material correspondiente—dos cubos, cuatro cuadrados, siete bastones y cinco perlas sueltas—se alinean un cartel de los cubos bajo los dos cubos de

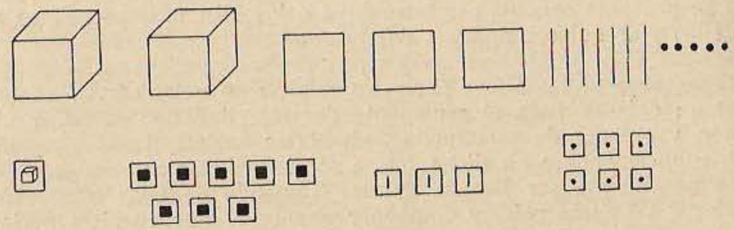


Fig. 34

perlas; ocho carteles de los cuadrados bajo los cuadrados de las perlas; tres carteles de los bastones en correspondencia con los bastones de las perlas y finalmente, seis carteles con el punto debajo las perlas sueltas. Después se procede a los cambios en el material de las perlas, sustituyéndose poco a poco los carteles con las cantidades diversas en que se ha escindido. Sumando éstas conjuntamente, nos encontramos con la cantidad primitiva de que proceden.

La operación de la resta se podría representar, en relación con el hecho consistente en la escisión de una cantidad única primitiva, en dos otras cantidades diversas, del modo siguiente:

8654

2872
5782

---

lo cual indica, que la cantidad 8654 se ha dividido en las dos que aparecen debajo, la segunda de las cuales (subrayada) representa lo que queda de la primera. Si después se efectúa la suma de las dos cantidades, la operación se puede representar como sigue:

8654

2872
5782

8654

Una representación, aún más exacta y evidente, sería la siguiente:

(2872

8654) lo que corresponde con la definición corriente de

(5782

la sustracción, es decir: *Dada una suma de dos números y uno de ellos, hallar el otro.*

LA DIVISION

La división se caracteriza por el hecho de que, una cantidad dada, está dividida en partes iguales que pueden ser dos, o más de dos, mientras que en la sustracción se escindía una cantidad en dos partes desiguales.

Para hacer la operación clara, puede presentarse al niño de modo activo, haciendo que la división de una cantidad tenga lugar entre diversas personas, esto es, entre niños mismos, que la lleven a la práctica en la forma primitiva que utilizarán personas incultas y desconocedoras del cálculo. Es decir, tomando las cosas una por una hasta que la cantidad remanente no puede ser distribuída por igual entre las personas que se la dividen. Este principio, extraño al cálculo, sirve para dar la idea de la operación como un hecho. Análogamente a cuanto se dijo para las otras operaciones, también en la división hay fundamentalmente una condición de cosas que no debe confundirse ni con el cálculo ni con el sistema decimal y que exige solamente un procedimiento sobre la materia acumulable o escindible. Es por ello por lo que queremos exponer primeramente el fundamento más simple y más real; es decir, el hecho que caracteriza la operación.

Sobre mi mesa está la siguiente cantidad : dos cubos, seis cuadrados, cuatro bastones y ocho perlas sueltas, o sea, el número 2648. Dos niños vienen a dividírselo en dos partes iguales, tomando para ello, cada uno, la misma cantidad. Los niños, comenzando por la cosa más grande, de más valor y por lo mismo más importante, toman un cubo para cada uno y concluídos los cubos, pasan a los cuadrados, tomando uno por uno mientras quedan, con lo cual, cada uno, tiene tres ; después, pasan a los bastones cogiéndolos sucesivamente y tienen dos. Finalmente, se reparten las perlas cogiéndolas una a una y cada niño tiene cuatro. De este modo, la cantidad inicial queda dividida en dos partes iguales, que constan cada una de : un cubo, tres cuadrados, dos bastones y cuatro perlas, representando cada una de ellas el número 1324. El cálculo numérico podría expresarse de la siguiente forma :

$$2648 : 2 = 1324$$

También en la división existe una sola cantidad efectiva, aquella que se divide, y el número que la representa se llama dividendo. El otro número (divisor) indica, en cambio, simplemente, en cuántas partes iguales debe subdividirse el dividendo. Al final de la operación se obtiene un número que representa una de las partes de la cantidad primitiva, partes que son iguales entre sí. Este número se llama cociente. Es preciso que el niño perciba, claramente y con rapidez, la idea de lo que el cociente representa. En efecto, en las escuelas elementales los niños que aprenden las operaciones, solamente como cálculo, y no como hecho, tienen el concepto equivocado de que el cociente es un resultado cuantitativo de la división y se expresan en la siguiente forma :

«Dos mil seiscientos cuarenta y ocho dividido entre dos es *igual* al cociente mil trescientos veinticuatro».

Ahora el resultado del cálculo es 1324, pero no el resultado del hecho. En el hecho—después de efectuada la división—existen las cantidades iguales entre sí—1324—en las cuales se divide la cantidad primitiva. Esto es : la cantidad primitiva permanece siempre en su totalidad, ha cambiado de forma solamente, porque al principio era una cantidad sola y después, en cambio, se ha separado en dos cantidades. Esto es, el 2648 se ha convertido en 1324 + 1324 ; o lo que es igual, no se ha destruído, se ha transformado.

Pongamos otros ejemplos : 9634 : 3.

La cantidad de nueve cubos, seis cuadrados, tres bastones y cuatro perlas está distribuída en tres grupos iguales, en cada uno de los cuales se encuentran tres cubos, dos cuadrados, un bastón y una perla y sobra una perla que no pudiendo ser repartida representa el resto. La distribución en las tres partes iguales, más el resto, representa la totalidad de la cantidad primitiva que permanece intacta, aunque diversamente distribuída. La división expresada en números sería, pues :

$$9634 : 3 = \begin{matrix} 3211 \\ 3211 \\ 3211 \end{matrix} + 1 = 9634$$

y esta demostración conduce a la reconstrucción del número primitivo y, por lo tanto, a la prueba de la división.

Sea la división siguiente : 2824 :4.

El cuatro está representado por cuatro niños que vienen a tomar, cada uno, la parte correspondiente del total. Los cuatro niños no pueden escoger un cubo, siendo por ello preciso, dividir los dos cubos en cuadrados, resultando veinte. Estos se agrupan juntamente con los otros ocho cuadrados (es decir, veintiocho cuadrados) y entonces comienza la división. Cada niño cogiendo, vez a vez, un cuadrado, llega a poseer siete. Los dos bastones corren la misma suerte de los cubos ; deben ser convertidos en perlas sueltas, que se unen a las cuatro ya existentes.

Procediendo a la división, cada niño se encuentra poseedor de seis perlas. He aquí pues, como se transforma la cantidad primitiva, que tiene una apariencia más sencilla, toda vez que han desaparecido dos figuras.

Tenemos, pues,

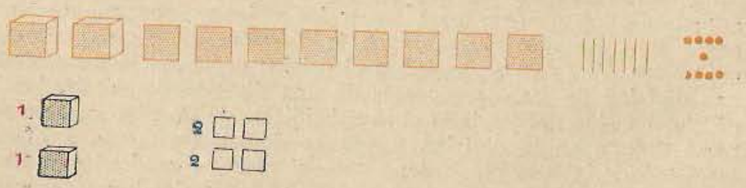
$$2824 : 4 = \begin{matrix} 706 \\ 706 \\ 706 \\ 706 \end{matrix} = 2824$$

Dado el placer que experimentan los pequeños, realizando los cambios decimales entre cubos, cuadrados, bastones y perlas, y su entusiasmo en avanzar para tomar los objetos uno por uno, y repartirse la cantidad total, resulta la división uno de sus ejercicios preferidos. Por otra parte, estos ejercicios provocan la necesidad de una división de trabajo, además de una división de cantidades. En efecto, ha sido necesaria la obra subsidiaria de un niño que no toma parte directa en la división y que se dedica solamente a efectuar los cambios. Dicho niño, tiene ante sí muchos cuadrados, bastones y perlas, que no tienen nada que ver con la cantidad que representa el dividendo, y que sirven, solamente, para efectuar cambios de alguna parte del individuo, cuando las circustancicas lo exijan. Este niño pues, ejerce el papel de *banquero*. Existe, además, un director que vigila la distribución del dividendo, a fin de que las partes sean distribuídas por igual, los cambios bien efectuados y no se toque el resto. Esta organización social da un carácter de vivacidad al hecho de la división.

División por varias cifras

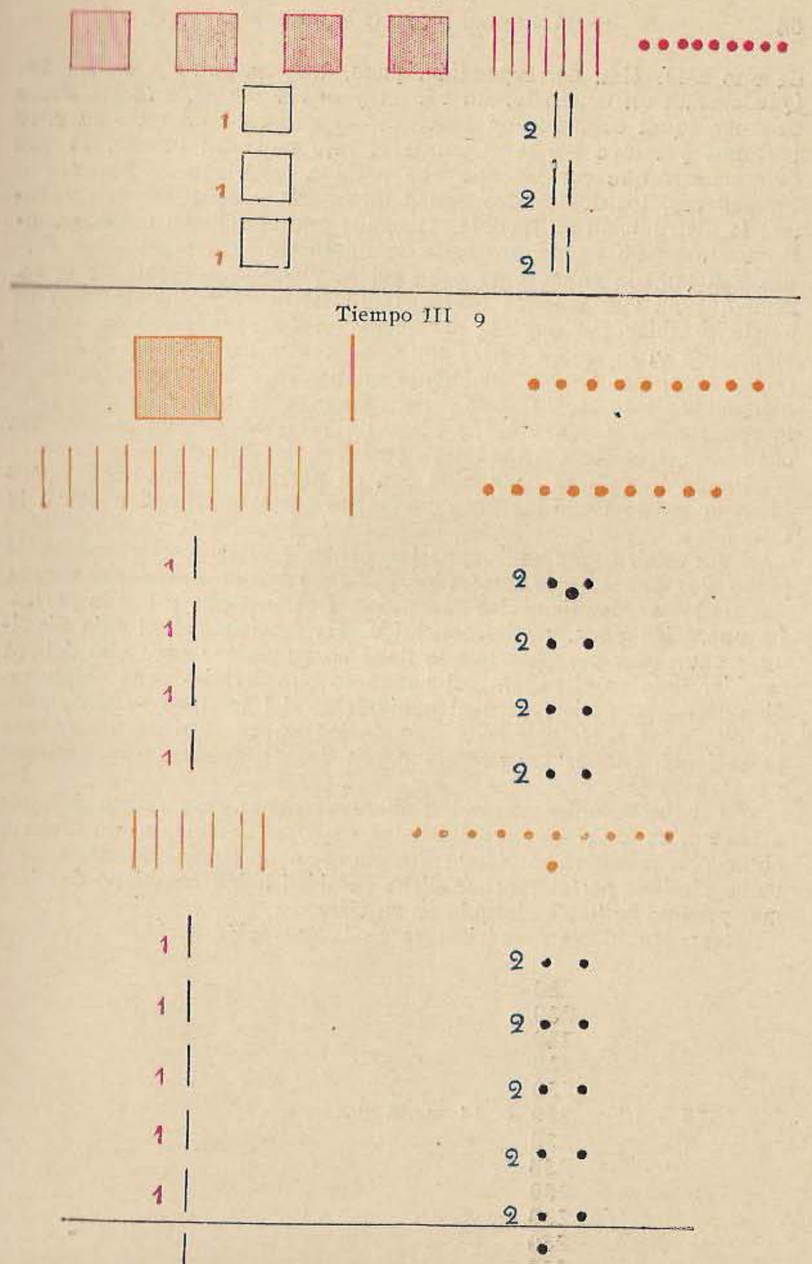
He preparado sobre mi mesa la cantidad de dos cubos, ocho cuadrados, siete bastones y nueve perlas o sea 2879. Seguro de interpretar los deseos de la mayoría, hago la siguiente proposición: que vengan doce niños a tomar su parte respectiva. Se precipitan cerca de mi mesa doce niños. Yo observo que son demasiados y que originarían confusión. «Que se separe un grupo de diez y que este grupo elija un representante, el cual tomará la parte correspondiente a los diez» y a fin de que se distinga de los otros dos que representan únicamente a sí mismos, distribuyo distintivos; un gran lazo rojo a quien representa diez niños, o sea *la decena*, y dos pequeñas cintas verdes a las modestas *unidades*. Los otros nueve excluídos un poco desilusionados, aguardan a un lado y como también éstos, deberán alcanzar una parte igual que la de los otros, los distingo con una pequeña cinta blanca. Y comienza la distribución entre el rojo y los verdes. Comienzo por dar al rojo uno de los cubos. Un cubo que ha de distribuirse entre diez supone un cuadrado para cada persona. Entonces los dos verdes pueden avanzar y tomar también un cuadrado para cada uno.

El otro cubo corresponde también al rojo, y a los verdes otro cuadrado. Han correspondido hasta ahora dos cuadrados para cada uno de los doce individuos y de la cantidad primitiva sobran cuatro cuadrados, siete bastones y nueve perlas. Ahora el rojo toma un cuadrado, lo que supone un bastón para cada uno de los individuos que representa, y los dos verdes toman, igualmente, cada uno su bastón, prosiguiéndose en dicha forma mientras ello sea posible, cada vez y por cada cuadrado que toma el rojo cogen los verdes su bastón correspondiente. Cuando el rojo ha tomado tres cuadrados debe detenerse, porque los verdes se llevaron seis bastones y que-



Tiempo I 2

Tiempo II 31



2879 : 12 = 239 + 11 Fig. 35 Tabla de la división da uno sólo. Han correspondido, pues, tres bastones a cada niño. Quedan aún un cuadrado, un bastón y nueve perlas. Precisa ahora cambiar aquel cuadrado en bastones, lo que dará un total de once bastones y nueve perlas. Cuando el rojo toma un bastón, lo que quiere decir que corresponde una perla a cada uno de sus nueve compañeros, los dos verdes toman otra perla y así prosiguen mientras la distribución es factible. Después que el rojo ha tomado cuatro bastones no puede proseguir la operación. En efecto, los verdes han tomado entre tanto ocho perlas y queda una sola de éstas. Pero quedan aún muchos bastones (11 - 4 = 7) y uno de ellos se puede cambiar por perlas ; entonces puede reanudarse la operación, toda vez que las perlas son once y seis los bastones. La operación prosigue. Queda finalmente un bastón y una perla, cantidad indivisible ; esto es, 11. Las perlas que correspondieron a cada niño fueron nueve. Cada uno de ellos ha recibido sucesivamente dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas o sea 239.

Puede irse ahora cada niño con su parte correspondiente, pero ninguno puede tocar las once perlas de resto que quedan sobre la mesa.

En realidad, sin embargo, las condiciones son estas : el rojo posee dos cubos, tres cuadrados y nueve bastones, mientras cada uno de los verdes tiene dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas. La operación pues, no ha concluído. Es preciso que el rojo distribuya entre diez personas lo que tiene en su poder ; para ello deberá cambiar todo en el puesto del banquero que dividirá cada objeto en diez partes, o mejor, dará el equivalente del total de subdivisiones de diez. Así el rojo y cada uno de los nueve blancos tendrá una parte igual a la de los verdes, o sea dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas.

Si los doce niños acumulan ahora su haber para unirlo después a las perlas de resto y realizan los cambios decimales, volverán a obtener la primitiva cantidad ; dos cubos, ocho cuadrados, siete bastones y nueve perlas, porque dicha cantidad había cambiado de forma, pero no se había alterado en su cifra.

Representándola numéricamente ; la operación sería :

$$\begin{array}{rl} & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ 2879 : 12 = & 239 + 11 = 2879 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \\ & 239 \end{array}$$

Lo que se puede también representar con la unión de 10 cantidades iguales, haciendo la prueba final :

$$\begin{array}{rl} & 2390 + \\ 2879 : 12 = & 239 + = 2879 \\ & 239 + \\ & 11 \end{array}$$

Es decir : 2879 : 12 = (239 × 12) + 11 = 2879. donde el número 239 es el cociente o sea la cuota correspondiente a cada niño.

Ejercicios paralelos

Suma de grandes números sin material de perlas

Paralelamente a estos ejercicios con los grandes números, realizados con el material de las perlas (ejercicios que son primarios y fundamentales, porque se realizan con cantidades efectivas) se presentan otros que sirven para demostrar los mismos hechos, operando sobre las cifras escritas.

Uno de los ejercicios individuales de tal género es el siguiente, que no obstante efectuarse con números indefinidamente gran-

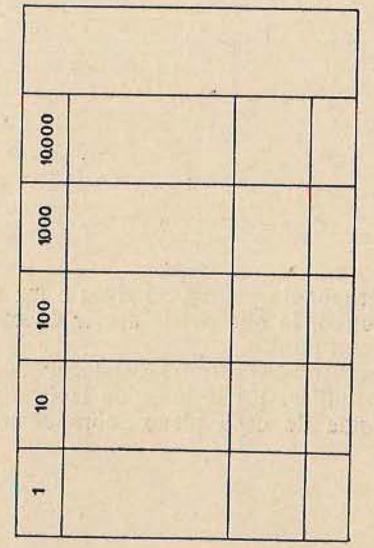


Fig. 36

des, hasta decenas y centenas de millar, sólo exige saber contar hasta 10 y el conocimiento de las jerarquías y mecanismos del sistema decimal. Con ello la operación se convierte en un medio atrayente para ilustrar la clave del sistema decimal y demostrar la simplicidad introducida en el cálculo con dicho sistema.

En los respectivos espacios indicados por el 10.000, 1.000, el 100, el 10 y el 1, se señalan tantos puntos como sean las unidades indicadas por la respectiva cifra en cada número, y así se acumulan en cada especie tantos grupos de puntos como sean las unidades de aquella determinada jerarquía en todos los números que se suman. Con el fin de que sea más clara la explicación, pondremos

8699 +
3454 +
2793 +
5816 = 20 . 762

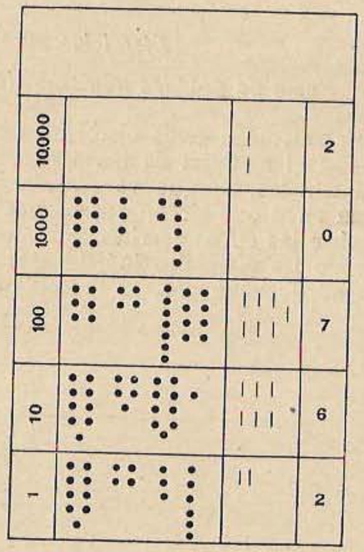


Fig. 37

en este caso, los grupos de puntos relativos a los diversos números, separados uno de otros, lo que puede servir de comprobación. Cada número se expresa en puntos.

El modelo representado permite catalogar números que llegan hasta la decena de millar. En la línea de la izquierda está indicada en cifras la jerarquía de cada plano sobrepuesto. Los números a sumar son:

8699
3454
2793
5816

Traducidos los números en puntos, éstos se cuentan relativamente a cada espacio y no es rigurosamente necesario comenzar por aquel donde están las uniones simples, más aun, en principio, es cosa que no debe preocuparnos. Por cada diez puntos contados en un espacio se coloca un signo vertical en el espacio superior a aquel de la primera columna a la derecha, y para los puntos restantes se señalan otras tantas pequeñas líneas verticales en la columna de la derecha correspondiente al espacio relativo a los puntos que se cuentan. Para facilitar la comprobación se hace una señal debajo de cada una de las decenas de puntos contados en los varios espacios. Así concluye la labor preparatoria de ordenación. Después de esto se cuentan los signos verticales de la primera columna; si son menos de diez se escribe, sin esperar a más, la cifra correspondiente en la segunda columna. Si, en cambio, son más de diez se borran y se pone un punto en la primera columna superior. De este modo quedan finalmente—en la segunda columna—cifras que son de diversa jerarquía.. Transcritas éstas en línea horizontal dan el resultado de la suma que en este caso es 20762.

Daremos otro ejemplo para hacer ver como los puntos se colocan en los espacios, acumulándolos cinco por cinco, sin distinguir los grupos que pertenecen a los números diversos, pero teniendo siempre puesta la atención sobre las jerarquías. Las sumas de diez en diez están representadas en la primera columna de la derecha por signos verticales, como se ha dicho, y se puede comenzar por cualquier parte, porque el orden definitivo se ha establecido solamente en la segunda columna a la derecha donde se escriben en cifras las cantidades obtenidas. En efecto, si en la primera columna

4856 +
7973 +
5494 +
8759 +
2932 = 30014

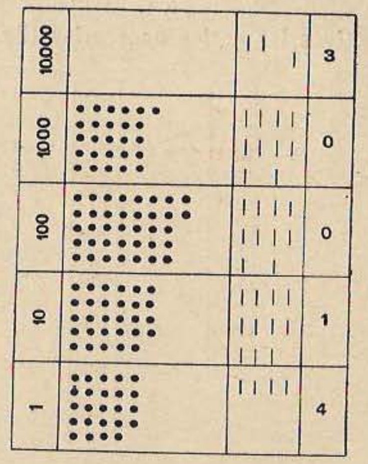


Fig. 38

los puntos son más de diez, se tachan y se sustituyen por una sola señal en el espacio superior.

La suma en cifras es la siguiente:

4856
7973
5494
8759
2932

Que da como resultado 30014.

Otro material es el siguiente, que será aplicado a una operación de sustracción con grandes cifras.

6859 - 4237

El material consiste en cuadernos que llevan escritos en colores diversos las series sucesivas; serie de 1000, serie de ciento, serie de diez, serie de uno. Cada uno de estas jerarquías tiene un color distinto. Las filas son separables y engomadas por detrás, como los sellos. Estos números representan las unidades de cuatro diversas jerarquías y sumando filas de estas unidades se llegan a componer los números de muchas cifras. Por ejemplo: para componer el número seis mil ochocientos cincuenta y nueve se separan las cantidades representadas en la siguiente figura, separando de las páginas respectivas las series necesarias (fig. 40)).

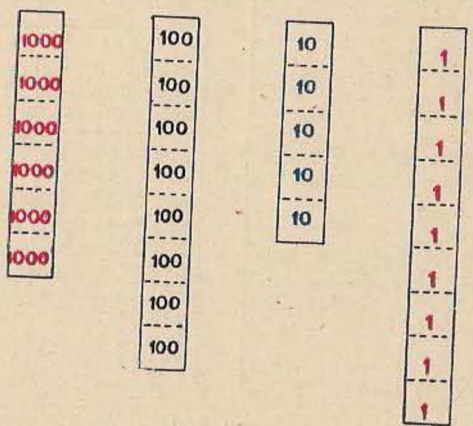


Fig. 39

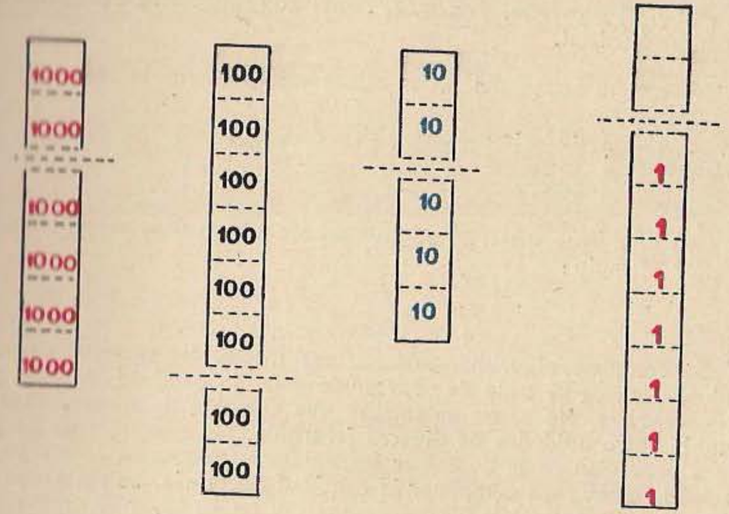


Fig. 40

Ahora de la cantidad así representada por medio de cuatro series de unidades, hay que sustraer la otra cantidad relativa al número 4237.

La idea de que uno solo de los números de la sustracción es efectiva, se deduce claramente del hecho, de que sólo el primero hay que formarlo con el material, mientras el otro indica solamente la cantidad que hay que restar de aquél. Relativamente, pues, a la formación del otro número se da, en realidad, «un par de tijeras» con las cuales se cortan las cantidades indicadas.

En efecto, en este caso la sustracción consiste simplemente en cortar una parte de las cuatro listas o fajas de las unidades.

Lo que queda después de realizada la operación son dos gru-

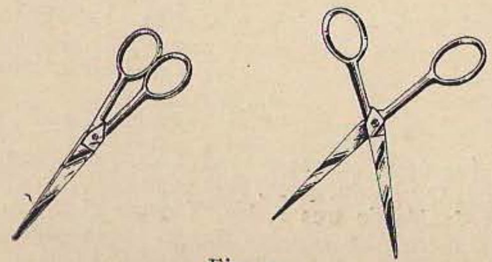


Fig. 41

pos ; uno, el separado, y el otro, aquel que representa el resíduo de la cantidad inicial.

Efectuando la operación con cifras se representaría así :

$$6859 = \left\{ \begin{array}{l} 2622 \\ + \\ 4237 \end{array} \right.$$

Con el mismo material se pueden efectuar varias sustracciones. Por ejemplo :

$$\begin{array}{r} 3465 \\ —\ 1836 \end{array}$$

Se compone el primer número por medio del material de unidades, y ahora se trata de separar de ésta, la cantidad indicada por el sustraendo. No es ya solamente una cuestión de tijeras, sino de cambio entre unidades de diversa jerarquía. En nuestro caso la primera operación es la de tomar las unidades existentes (5), pero no bastando éstas para componer la cantidad necesaria, se corta con las tijeras un 10 de la faja correspondiente y en su lugar se coloca una faja de 10 unidades simples de las cuales se corta una para agregarla a las otras cinco, quedando en el lugar debido nueve unidades. Ahora las decenas restantes son cinco solamente en vez de seis y las tres pedidas se cortan de aquí con las tijeras, quedando dos solamente. Para las centenas se procede análogamente. Tomadas todas las centenas existentes que son cuatro y por ello insuficientes, se separa un millar con las tijeras y en su lugar se recoge una faja

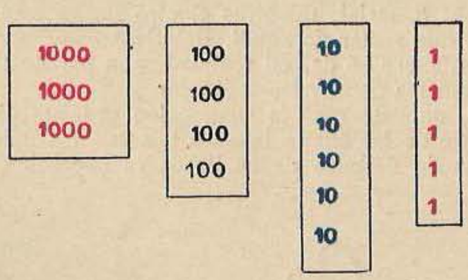


Fig. 42

de diez centenas de la que se separan cuatro para unirlas a las que ya se quitaron. Quedarán, pues, seis centenas. Los millares primitivos se han reducido de tres a dos. Y como el nuevo número pide uno, se separan los dos con las tijeras, recogiendo uno. Quedará por fin, como resultado, la cantidad correspondiente al número 1629

que con la otra obtenida 1836 constituirá la primera, que ya ha desaparecido.

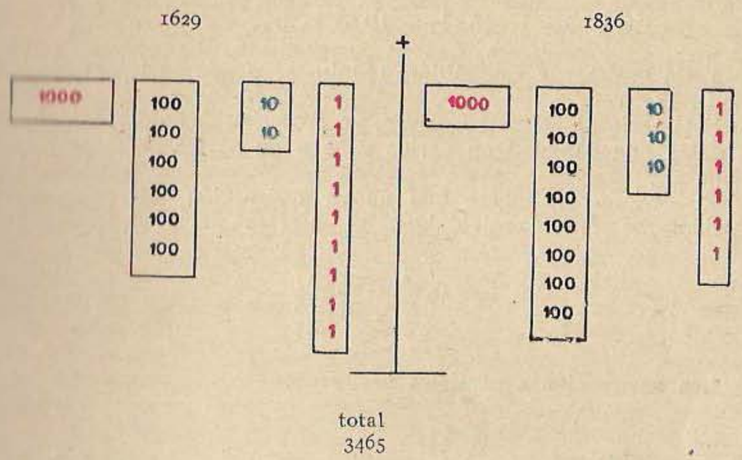


Fig. 43

Es decir, que en lugar del primitivo 3465, existen ahora las dos cantidades 1836 y 1629 : lo que demuestra que la substracción es una división en partes desiguales. En este caso el residuo es más vistoso que el número primitivo. Por ejemplo : aquí hay una fila de nueve unidades donde antes había cinco solamente y mientras en el número primitivo existían sólo cuatro centenas aquí hay ahora seis, y en el número que desaparece, ocho.

Con frecuencia, el niño queda sorprendido y, por lo mismo, vivamente interesado, al ver la expansión de los números obtenidos del primero, cada uno de los cuales tiene muchos elementos más que aquel del cual resultan. Aquí resalta la gran diferencia entre esa operación y la suma en la que, la integración de diez unidades inferiores para constituir una superior es el modo de operar, inverso al efectuarlo ahora. Si, por ejemplo, se suman los dos números que venimos considerando, volviendo a agrupar las unidades y centenas que a ellos pertenecen se vería desaparecer los grupos y el resultado total quedaría recogido dentro de la cantidad primitiva. Es el secreto y la clave del sistema decimal.

La sustracción se considera siempre entre dos números, pero, esta operación, es susceptible de ser continuada.

Obtenido un resíduo, pueden aún sustraérsele otras cantidades, hasta que el resíduo final, sea igual a cero, o sea, cuando no quede nada del número primitivo.

Por ejemplo, suponiendo la sustracción : 6859 — 4237 = 2622

Se puede aun continuar la sustracción, sustrayendo del resto, la cantidad de 1975.

$$2622 - 1975 = 647$$

Y finalmente de este último resultado, puede sustraerse la cantidad 647.

Esta serie de restas sucesivas, se producen cuando, por ejemplo, se gasta una cantidad en varios usos o en varias ocasiones, hasta agotarla.

Puede aún efectuarse una nueva sustracción. La suma puede considerarse como subdividida en otras tantas partes desiguales :

$$6859 \left|\begin{array}{r} -4237 \\ -1975 \\ -647 \end{array}\right.$$

Las sustracciones parciales serán :

6859 < −4237
2622 < −1975
647 < −647
0

La división es una aplicación de este principio ; en ella se forman tantas divisiones parciales y sucesivas sobre los resíduos que van dejando cada una de las operaciones.

Existe, pues, una perfecta correspondencia, entre la operación de restar o sustraer (fragmentación de un conjunto en partes desiguales entre sí) y la división fragmentaria de un todo en partes iguales entre sí.

La diferencia consiste, en que en la sustracción, no se procede simultáneamente, si no, sucesivamente. En la segunda, va quedando sucesivamente una sola sustracción. De modo que la diferencia consiste en el hecho, no en el cálculo o en la operación, sino en el procedimiento.

LOS PROBLEMAS DE LA ARITMÉTICA

Puede decirse que los ejercicios indicados son una ilustración del sistema decimal, donde las cuatro operaciones, extendiéndose a los grandes números, se convierten en medio para enseñar el mecanismo.

En la base del sistema estudiado, se encuentra como clave la transmigración de unidades, que, se agrupan o escinden, distribuyéndose en partes. Pero siempre queda la evidencia de que las cantidades representadas por dos números, circulan sin desaparecer jamás. La prueba de las operaciones lo demuestra. Las operaciones con los números, contienen una demostración exacta del hecho que nada se crea ni se destruye, sino, que todo se mueve. La cifra parece correr tras la materia y con su mecanismo podría simbolizar el ciclo.

Aparte esta cuestión bien interesante, se pueden considerar otros hechos que caracterizan y, por lo mismo diferencian, las varias operaciones. Aquella acumulación de cantidades diferentes, como en la suma, o de cantidades iguales, como en la multiplicación, o el escindirse una cantidad en dos partes diversas, de las cuales, una sola es conocida y la otra representa una incógnita, como en la sustracción ; o finalmente, la equitativa distribución de una cantidad en partes tan rigurosamente iguales que, si existe un resto, antes se abandona que se utiliza en provecho de unos pocos, todo ello atrae como hecho práctico en sí mismo. Ni el número, ni el sistema numérico, tienen que ver con tales situaciones. Parecen hechos relacionados más bien con la vida y con los principios morales, que con la aritmética. Allí se encuentra el hombre frente a la materia. Mirando a través de esta luz aparece la vida social con sus acontecimientos. El negociante que ha ingresado durante el día muchas sumas diversas, por la noche hará una suma. En cambio, el taquillero de un teatro a precio fijo y, que por lo mismo, ha recibido muchas cantidades iguales, efectuará una multiplicación. Viceversa ; la madre que tiene en su poder la asignación mensual intacta y que separa de ella el importe de la renta de la casa, efectuará una sustracción. En cambio, la cantidad destinada a pagar la pensión de sus tres hijos en el colegio, la dividirá en tres partes iguales. De este modo la vida social del hombre se organiza sobre las necesidades materiales que surgen a cada paso y presentan continuamente «problemas» que, solamente los números, pueden resolver de un modo claro y exacto. Esta existencia del número en la vida ordinaria, abre la puerta a los problemas de la aritmética. Presentados en las escuelas como una dificultad que se supera difícilmente, aquí se ofrecen como representantes del hecho mismo que da carácter y forma a las operaciones, y basta dejar un poco de espontaneidad a los niños que han hecho observaciones y razonamientos, para que los problemas se reconozcan en la vida social con la misma facilidad con que la luz, los colores y las flores se reconocen en la vida natural. En efecto, en nuestras escuelas, los niños resuelven en seguida y espontáneamente sus problemas y son frecuentemente frutos de su imaginación que se entrelazan con las composiciones literarias. Situaciones difíciles van con frecuencia a encontrar su epílogo en una operación aritmética y así el problema se funde con la realidad. Hemos observado que no todas las operaciones despiertan igual interés en la imaginación infantil ; es la sustracción la que más apasiona y la que se presenta generalmente como epílogo de los

«Problemas literarios». He aquí, por ejemplo, un tema literario, tratado por un niño de una escuela holandesa, que presento abreviado :

...Aquellos niños habían comido a hurtadillas algunas hermosas manzanas que estaban en el cesto, cuando oyeron decir «no os olvidéis de llevar esas treinta manzanas a la señora X. porque hoy cumple treinta años».

¡ Ah ! Es preciso comprar las manzanas que faltan.

Pero ¿cuántas se han comido?

No lo recuerdan. Pero un niño exclama : «No tengáis miedo, basta con efectuar una sustracción».

La sustracción hace encontrar esta incógnita amenazadora y después sólo habrá que sumar las que quedan y las que se compren para completar y ver si suman treinta, con lo que se efectuará la comprobación.

PROGRESO

El conjunto de los ejercicios descritos trazan un plan que parece realizado. Las cuatro operaciones con los grandes números, la posesión clara de sistema decimal, la resolución de los problemas prácticos que se presentan en la vida ordinaria, hacen pensar en la frase del pequeño que decía, convencido : «Lo sé todo».

El progreso se realiza ahora en el detalle, y se hace sobre el análisis de lo que existe y logra interesar. El detalle asume importancia, porque hace penetrar en el conjunto visto externamente, pero con frecuencia asume la apariencia de un camino opuesto y se procede de entonces del conjunto al detalle, de lo grande a lo pequeño, de lo complejo a lo sencillo.

Los ejercicios siguientes se refieren a un análisis de la multiplicación, operación que apareció fugazmente, sólo como un caso de adición uniforme.

LA MULTIPLICACION

El rasgo saliente de la multiplicación es el de una suma cuyos términos (sumandos) son iguales entre sí y es por ello la repetición de la misma cosa que se acumula. Otra característica es que repitiéndose el todo, se repiten las partes que lo componen. Y por último, se observa en ella que repitiéndose la misma cantidad, las partes pueden componerse en una forma rectangular.

En la segunda característica se ve su aspecto algebraico, y en la tercera el geométrico.

El concepto algebraico de la multiplicación es aquel que de-

muestra más claramente su esencia, y está representado por la fórmula :

$$n(a + b + c + \ldots) = na + nb + nc + \ldots$$

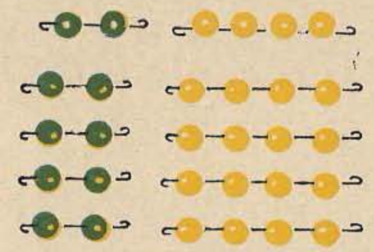


Fig. 44

Tomemos los pequeños bastones de perlas utilizados en el ejercicio de la serpiente y fijemos una cantidad mediante la unión de dos o más bastones, por ejemplo : 2 + 4.

Multiplicar esta cantidad por tres, por ejemplo, quiere decir repetirla tres veces, es decir ; tres veces los bastones amarillos, del cuatro y tres veces los bastones verdes de dos.

Igualmente se procederá para una cantidad compuesta de mayor número de bastones, por ejemplo, 6 + 2 + 3. Repetir esta cantidad dos veces equivale a repetir, dichas dos veces, todos los componentes de la misma.

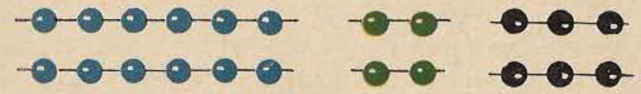


Fig. 45

El concepto geométrico de la multiplicación es el que parte de un punto que representa la unidad, que se repite un cierto número de veces asumiendo la disposición de una línea. Por ejemplo 1 × 6.

1 × 6

Fig. 46

y el número que constituye la línea, repitiéndose más veces con acumulación vertical, asume la forma de un rectángulo. Por ejemplo 6 × 4

6 × 4

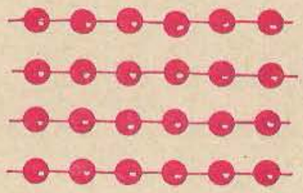


Fig. 47

o también, si la repetición acaece tantas veces como indica el número de las unidades que constituyen la línea, se obtiene la forma de un cuadrado. Por ejemplo : 5 × 5.

5 × 5

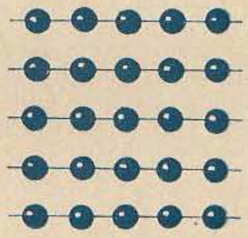


Fig. 48

El concepto geométrico de la multiplicación revela, pues, un orden en la disposición de los números que es la trabazón, el enlace entre la aritmética y la geometría.

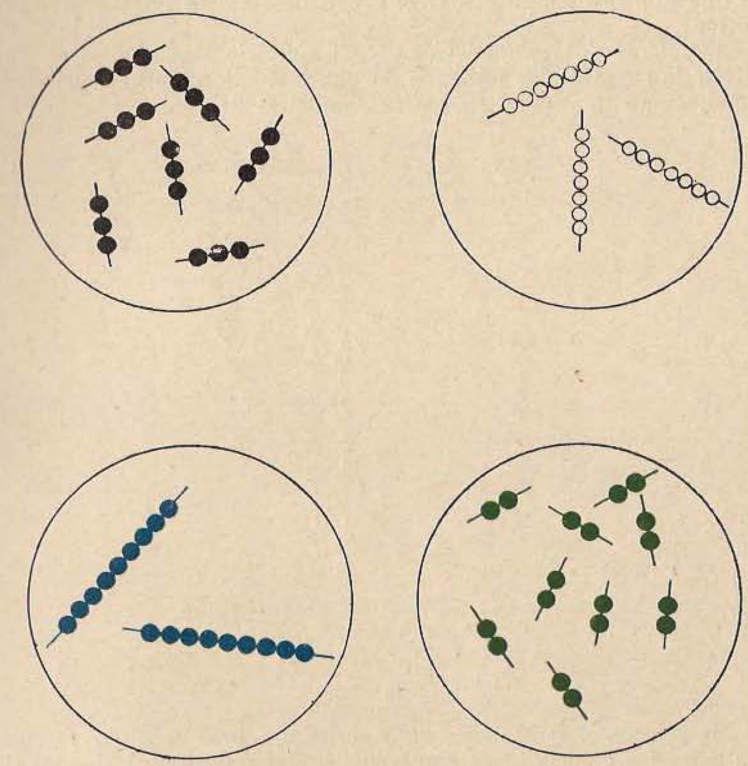
La multiplicación tiene, pues, una cantidad de unidades que se repite integralmente y que constituye el número *efectivo*. Este número se llama multiplicando porque se debe multiplicar. El otro número no representa en sí una cantidad a añadir, sino que indica simplemente las veces que el multiplicando debe ser repetido ; este segundo número «índice de repetición» se llama multiplicador.

Cada una de las cosas antes descritas no se presentan al niño como definiciones, sino que se les ofrece bajo la forma de ejercicios distintos uno de otro, que se realizan utilizando el material y que se siguen paralelamente.

DISTINCION ENTRE LOS DOS TERMINOS, MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR

Las figuras siguientes :

3 × 7 7 × 3



9 × 2 2 × 9

Fig. 49

sirven para poner de relieve el significado diferente de los dos términos. En efecto, en la primera figura hay siete bastones de tres perlas que representan la multiplicación de 3 × 7 ; la figura adyacente, en cambio, representa tres bastones de siete perlas o sea la multiplicación de 7 × 3. En las figuras inferiores se ven a un lado nueve bastones de dos perlas, que representan la multiplicación de dos por nueve y dos bastones de nueve perlas que representan la multiplicación de nueve por dos.

Cuando se cuentan las unidades constitutivas de estos bastones, es decir, cuando se suman, se encuentran totales iguales, es decir, tres por siete igual a siete por tres y nueve por dos igual a dos por nueve. Lo que significa que la suma borra las distinciones evidentes en el planteamiento de una misma multiplicación. Esta confusión, o correlación de hechos evidentes, se enuncia generalmente diciendo que «en la multiplicación, el orden de factores no altera el producto».

Ejercicios de multiplicación.— El ejercicio siguiente sirve para referir la suma de los números de una multiplicación al sistema decimal, como se demuestra en las siguientes figuras.

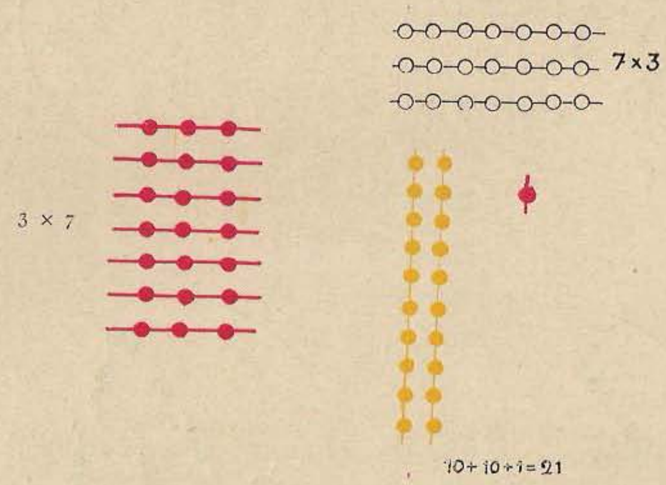


Fig. 50

Se colocan siete bastones de 3 perlas uno bajo el otro y se cuentan todas las unidades que sumarán veintiuno. Según el sistema decimal, esta cantidad corresponde, pues, a dos bastones de diez y una perla de uno. Disponiendo uno bajo el otro los tres bastones de siete y contando las unidades, se encuentran también, veintiuna, que en el sistema decimal se traduce igualmente en dos bastones de diez y una perla aislada; la diferencia que era evidente en la multiplicación, viene cancelada en el producto. Lo mismo sucede con los otros

grupos que se corresponden. Poniendo en hilera los bastones de dos perlas y contando las unidades que los constituyen, se encuentra una suma de diez y ocho, que equivale a un bastón de diez, y uno de ocho. Colocando después los bastones de nueve uno debajo del otro y contando las unidades, se encuentran también diez y ocho que se traduce en el sistema decimal por el mismo grupo de perlas. De este modo el hecho de que el orden de los factores no altera el pro-

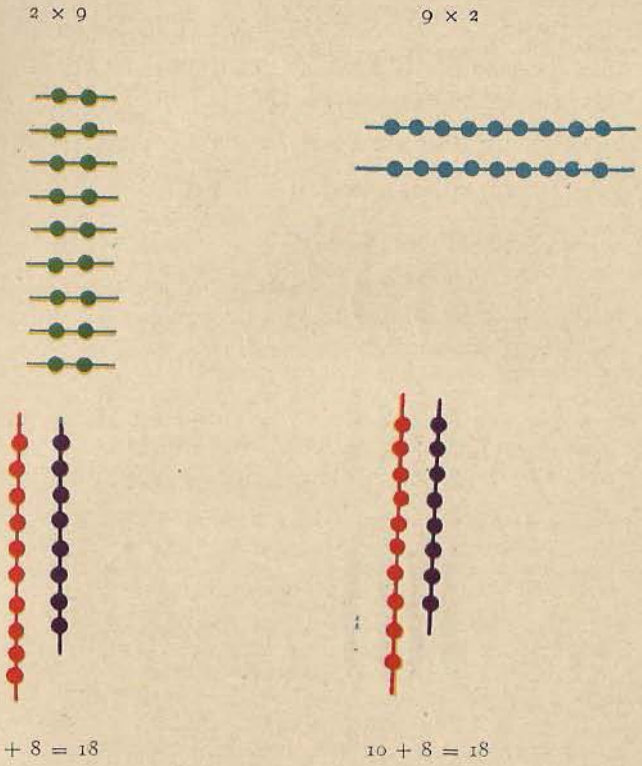


Fig. 51

ducto, y al propio tiempo, que la suma cancela, borra, el significado diverso de los factores, puede comprobarse con infinitos ejercicios.

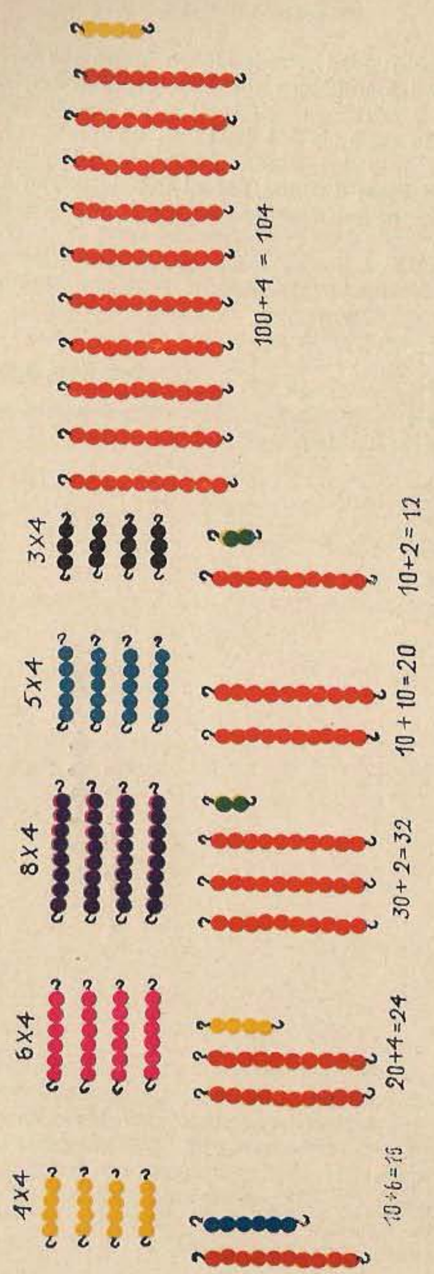


Fig. 52

Consideremos ahora la suma de varios números inferiores a nueve, por ejemplo 4, 6, 8, 5 y 3, cuyo total se quiere multiplicar por cuatro. Los bastones relativos a dichos números se colocan uno a continuación del otro, en línea horizontal, de un modo análogo al ejercicio de la serpiente. Es evidente, que para repetir este conjunto de bastones cuatro veces, precisa repetir cuatro veces cada uno de ellos.

Resultan de este modo varios grupos de bastones iguales, que numéricamente se pueden indicar así: 4 × 4, 6 × 4, 8 × 4, 5 × 4, 3 × 4. De este modo se plantea la multiplicación; ahora se trata de calcular grupo por grupo las unidades incluídas en cada uno y por cada diez se coloca un bastón de diez, mientras, el número inferior a diez se coloca al lado, en la forma que indica la figura. De este modo y, por medio del material de perlas, se han efectuado los siguientes cálculos: 4 × 4 = 16. 6 × 4 = 24. 8 × 4 = 32. 5 × 4 = 20. 3 × 4 = 12. Los resultados parciales así obtenidos se representan: no según el orden de la multiplicación, sino, según el sistema decimal, y no tienen otra diferenciación que la de decenas y unidades. Ahora se trata, de sumar estos resultados parciales. Para esto, se acumulan juntas todas las decenas, que en este caso son nueve, y aparte los bastones menores de diez, representados en este caso, por 6, 4, 2 y 2, para sumarlos conjuntamente. Cuando las unidades de los bastones lleguen a sumar 10, se sustituyen por un bastón de 10. En este caso el conjunto asciende a 14 y se sustituye por un bastón de 10 y otro de 4. Resultan así diez bastones de 10 que forman inmediatamente un cuadrado de 100, quedando libre únicamente un bastón de cuatro. El total resulta, pues, igual a ciento cuatro.

Semejantes ejercicios pueden repetirse un número indefinido de veces y vienen a fijar las varias operaciones parciales que se han acumulado en el conjunto de una multiplicación de un modo completo.

La multiplicación ordinaria, efectuada con grandes números según el sistema decimal, es una aplicación de dicho análisis. En efecto, un número decimal es la suma de cantidades pertenecientes a las distintas jerarquías y se puede representar por sus factores, descomponiendo dicho número. Por ejemplo, 2469 es igual a dos mil, cuatrocientos, sesenta, nueve. En vez de los bastones como antes, se usa en tal caso el material del sistema decimal, es decir: dos cubos, cuatro cuadrados, seis bastones y nueve perlas. Multiplicar este número por tres, quiere decir precisamente, tomar tres veces cada una de las cantidades representadas, es decir: (Fig. 53). tres veces dos cubos, tres veces cuatro cuadrados, tres veces seis bastones y tres veces nueve perlas. (a). Entonces se suman y se ordenan según el sistema decimal, (c) grupo por grupo, comenzando por las unidades, con la advertencia de que, a cada diez encontrado, desaparece el elemento de la jerarquía sobre la cual se cuenta

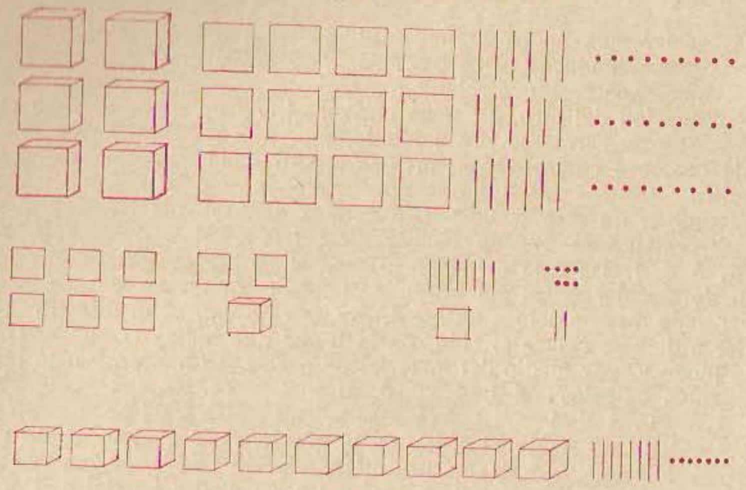


Fig. 53

y se sustituye por un elemento de la jerarquía superior y así sucesivamente.

Los pasos indican con las perlas las operaciones que se hacen con las cifras, es decir, se multiplica por el multiplicador cada cifra del multiplicando. El hecho que esto se hace comenzando por las unidades simples y acumulando, de vez en vez en la jerarquía superior, las decenas que se van encontrando, representa la acumulación de dos hechos diferentes : es decir, la multiolicación de cada elemento, y la ordenación de los resultados según el sistema decimal. El procedimiento con las perlas se puede traducir en cifras, colocando éstas,

Millares	Centenas	Decenas	Unidades
2	8	6	9
2	8	6	9
2	8	6	9
2 × 3	8 × 3	6 × 3	9 × 3

Fig. 54

en la posición de su jerarquía, indicando la denominación al principio de la columna y, por lo mismo, emitiendo los ceros. Entonces, se obtiene un cuadro, que se refiere al cálculo directamente. El cuadro demuestra que si se deben efectuar multiplicaciones de varias cifras por tres, el cálculo en sí es igual, sea cual fuese la posición de

estas cifras. Por ejemplo, en nuestro caso, el cálculo de las unidades, relativo al nueve es más difícil que el cálculo de los millares reativo al dos, así se ha aislado la dificultad relativa al cálculo de la multiplicación. Si el número a multiplicar, en vez de los millares llegase a los millones, las dificultades del cálculo serían igualmente simples y limitadas. En efecto, en la figura siguiente está representada la multiplicación 2864935 × 4.

	Millares			Unidades Simples		
Millones	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2 × 4	8 × 4	6 × 4	4 × 4	9 × 4	3 × 4	5 × 4

Fig. 55

Si se consideran aparte las jerarquías y los cambios entre grupos, que son relativos al sistema decimal, se ve cómo, numéricamente, el cálculo es igual en todos los grupos. Entonces aparece evidente que una simplificación puede existir en el cálculo mismo, consistente en memorizar todas las combinaciones posibles que se refieren a cada uno de los números hasta el diez. Esta simplificación es un trabajo aparte, auxiliado por el material de la tabla de multiplicar, material que puede ser facilitado, paralelamente, a todos los ejercicios hasta ahora enseñados.

Por ejemplo, en el caso citado, la simplificación consiste en saber en seguida, de memoria, que el cinco repetido cuatro veces da el número veinte ; el tres, repetido cuatro veces, doce, etc.

5 × 4 = 20
3 × 4 = 12
9 × 4 = 36
4 × 4 = 16
6 × 4 = 24
8 × 4 = 32
2 × 4 = 8

Fig. 56

Pero es necesario saber qué son aquellos números, en lo que a jerarquía se refiere. El veinte representa unidades simples, en cambio, doce decenas : treinta y seis centenas, etc. Los dos hechos pertenecen a órdenes diversas ; el uno pide memorización, el otro pide que los números se sometan a una ordenación según los principios del sistema decimal. No pudiendo existir un grupo de unidades superior a nueve en ningún lugar, todos los productos de dos cifras como los productos veinte, doce, treinta y seis, etc. deben separarse como se ve en la figura 57. Porque el dos a la izquierda de las veinte unidades son decenas, como también son decenas las dos que pertenecen al 12 en el lugar sucesivo, mientras el uno en las doce decenas es una centena, que va unidó con las seis del número sucesivo.

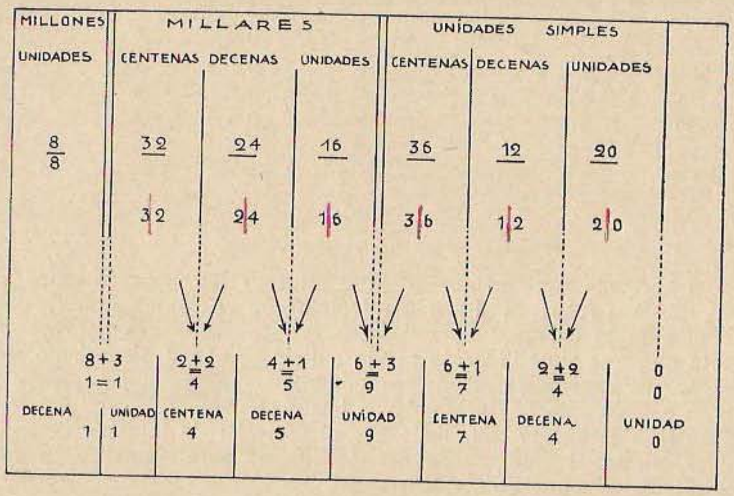


Fig. 57

Cuando se encuentra como producto una sola cifra (es decir, que no fué superado el nueve) no es necesaria separación alguna. En tal caso, el orden se halla establecido ; entre dos líneas sucesivas de separación se encuentran unidades pertenecientes a la misma jerarquía. Entonces, estos números se suman juntos y se llega al resultado definitivo. La operación indicada en la figura 57 es la multiplicación de 2864935 × 4 dá como resultado 11459740.

EJERCICIOS PARALELOS. — Dividamos, por ello, en ejercicios paralelos las dos dificultades indicadas en relación con la multiplicación.

1.ª — La memorización de resultados.

2.ª — Hacer fáciles las localizaciones de los números, según las jerarquías.

Este último ejercicio, siendo propio del sistema decimal, ayuda en general el cálculo en todas las operaciones.

MEMORIZACIÓN DE LAS COMBINACIONES

Los ejercicios analíticos deben finalizar en sí mismos, y representan cada uno una labor completa más o menos sencilla, pero siempre interesante. El primer ejercicio paralelo para la memorización de la repetición de todos los números de uno a nueve, repetido cada uno de una a nueve veces, es decir, el conjunto de la tabla de multiplicación, es tan sencillo, que se puede efectuar con niños de cinco años y medio a seis.

MATERIAL. — El material de la tabla de Pitágoras consta de varias partes.

Una de ellas es un cartón cuadrado que tiene cien huecos (10 por 10) en cada uno de los cuales se puede colocar una perla. Encima, encabezando las columnas verticales se hallan impresos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A la izquierda puede encajarse un cartoncito que lleva escrito en color rojo una de las cifras citadas. Este cartoncito que hace las veces de multiplicando se va cambiando ; el sistema consta de diez cartoncitos de éstos, con diez cifras.

A la izquierda y arriba, hay un hueco separado que sirve para colocar una ficha de color, que debe alternar su puesto, siguiendo la operación colocándose encima del número en acción.

Acompaña al cartón una elegante cajita que contiene cien perlas sueltas. El ejercicio que se hace con este material es sencillísimo :

Supongamos que se quiere multiplicar el 6 por la serie de números del 1 al 10. tendremos : 6 × 1 ; 6 × 2 ; 6 × 3 ; 6 × 4 ; 6 × 5 ; 6 × 6 ; 6 × 7 ; 6 × 8 ; 6 × 9 ; 6 × 10.

Para ello se empieza por poner en el hueco de la izquierda el cartoncito que lleva el número 6. Al multiplicar 6 por 1 el niño hace dos cosas : pone la ficha encarnada sobre el 1, que encabeza la columna y coloca seis perlas en columna vertical debajo del número uno.

Para multiplicar 6 por 2, el niño pone la ficha encarnada sobre el 2 y añade otras seis perlas en columna vertical debajo del 2. Al multiplicar 6 por 3 hace pasar la ficha sobre el 3 y añade seis perlas en línea vertical debajo del 3 ; y así prosigue, hasta llegar a 6 por 10.

El cambio de lugar de la ficha, sirve para indicar cada vez el multiplicador, y exige de parte del niño una atención siempre activa y una gran exactitud de ejecución.

Al mismo tiempo que el niño realiza lo arriba descrito, escribe las multiplicaciones en unas hojas especiales que coloca a la derecha del objeto que utiliza para multiplicar.

Hay preparadas colecciones que constan de cien hojas especiales, distribuídas en diez series, cada una de las cuales tiene a su vez diez hojas.

Véase en la siguiente tabla una hoja preparada para multiplicar el 3. Todo está ya impreso, sólo falta que el niño añada los productos que obtendrá agregando cada vez tres perlas, como se ha descrito anteriormente. Si no comete errores, el niño escribirá 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

De este modo proseguirá su ejercicio, y como de cada hoja posee diez ejemplares, podrá repetir diez veces cada uno de ellos.

Repitiendo un ejercicio el niño llegará a aprenderlo de memoria, pero además le veremos usar otro procedimiento para retener mejor las multiplicaciones; le veremos, por ejemplo, pasearse con una hoja en la mano llena de multiplicaciones, que lee y relee de cuando en cuando. Es que está estudiando: siete por seis,cuarenta y dos; siete por siete cuarenta y nueve...

El material que sirve para aprender la tabla de multiplicar es de los que más apasiona a los niños; llenan seis o siete hojas, una tras de otra, y pasan días y semanas entregados a este ejercicio. Casi todos los niños piden permiso para llevarse el material a sus casas. La primera vez que les fué ofrecido se produjo una verdadera revolución; todos querían llevárselo. No habiendo obtenido permiso para ello, los niños se dirigieron a sus madres instando para que aquéllas lo comprasen. Fué verdaderamente difícil convencerles de que esos objetos no se venden en las tiendas, y que, por lo tanto, no podía obtenerse. Pero los niños no quedaron satisfechos, y una niña mayorcita, que se convirtió en cabeza de motín, exclamó:

«La doctora quiere hacer un experimento con nosotros; pues bien, digámosle que si no nos da el material de la multiplicación, no volvemos más a la escuela».

Esta amenaza estaba fuera de lugar y no hablaba muy en favor de la niña; no obstante, había en todo esto algo muy interesante, y es, que esa tabla de multiplicar, que es uno de los pequeños tormentos de los niños, venía a ser una tentación seductora, que convertía en lobos los corderos.

Cuando los niños han llenado varias veces series enteras de hojas, auxiliándose con el material, se les ofrece una tabla para las *confrontaciones*, a fin de que comprueben si en las multiplicaciones parciales han cometido algún error. Tabla por tabla y número por número comprueban si cada producto corresponde a los de las diez columnas. Cuando han realizado este trabajo con exactitud, los niños poseen sus series, en la seguridad de que no hay errores.

Se copian una al lado de otra, en el siguiente modelo, las columnas. Cuando han realizado este trabajo con exactitud, los niños del 2; debajo del 3, la del 3, debajo del 4, la del 4; etc.

Hecho esto, se obtiene una tabla igual a la del material que servirá de modelo para hacer las confrontaciones.

3

TABLA DE MULTIPLICAR

Combinaciones

del

tres

con la serie de números del 1 al 10

3 .	1	=	....
3 .	2	=	....
3 .	3	=	....
3 .	4	=	....
3 .	5	=	....
3 .	6	=	....
3 .	7	=	....
3 .	8	=	....
3 .	9	=	....
3 .	10	=	....

Tabla de la multiplicación

según la combinación de los números en la serie progresiva del 1 al 100

1 . 1 = 1	2 . 1 = 2	3 . 1 = 3	4 . 1 = 4	5 . 1 = 5
1 . 2 = 2	2 . 2 = 4	3 . 2 = 6	4 . 2 = 8	5 . 2 = 10
1 . 3 = 3	2 . 3 = 6	3 . 3 = 9	4 . 3 = 12	5 . 3 = 15
1 . 4 = 4	2 . 4 = 8	3 . 4 = 12	4 . 4 = 16	5 . 4 = 20
1 . 5 = 5	2 5 = 10	3 . 5 = 15	4 . 5 = 20	5 . 5 = 25
1 . 6 = 6	2 . 6 = 12	3 . 6 = 18	4 . 6 = 24	5 . 6 = 30
1 . 7 = 7	2 . 7 = 14	3 . 7 = 21	4 . 7 = 28	5 . 7 = 35
1 . 8 = 8	2 . 8 = 16	3 . 8 = 24	4 . 8 = 32	5 . 8 = 40
1 . 9 = 9	2 . 9 = 18	3 . 9 = 27	4 . 9 = 36	5 : 9 = 45
1 . 10 = 10	2 . 10 = 20	3 . 10 = 30	4 . 10 = 40	5 . 10 = 50

Mod. 7.

6 . 1 = 6	7 . 1 = 7	8 . 1 = 8	9 . 1 = 9	10 . 1 = 10
6 . 2 = 12	7 . 2 = 14	8 . 2 = 16	9 . 2 = 18	10 . 2 = 20
6 . 3 = 18	7 . 3 = 21	8 . 3 = 24	9 . 3 = 27	10 3 = 30
6 . 4 = 24	7 . 4 = 28	8 . 4 = 32	9 . 4 = 36	10 . 4 = 40
6 . 5 = 30	7 . 5 = 35	8 . 5 = 40	9 . 5 = 45	10 . 5 = 50
6 . 6 = 36	7 . 6 = 42	8 . 6 = 48	9 . 6 = 54	10 . 6 = 60
6 . 7 = 42	7 . 7 = 49	8 . 7 = 56	9 . 7 = 63	10 . 7 = 70
6 . 8 = 48	7 . 8 = 56	8 . 8 = 64	9 . 8 = 72	10 . 8 = 80
6 . 9 = 54	7 . 9 = 63	8 . 9 = 72	9 . 9 = 81	10 . 9 = 90
6 . 10 = 60	7 . 10 = 70	8 . 10 = 80	9 . 10 = 90	10 . 10 = 100

Tabla de Pitagoras

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

TABLA DE MULTIPLICAR CON TODOS LOS PRODUCTOS

El niño posee ahora la tabla pitagórica como el resultado de muchos trabajos parciales y será fácil enseñarle a «leerla», como una tabla de multiplicar, pues la sabe ya de memoria. Podrá entonces llenar de memoria con los productos los lugares vacíos; la única dificultad que tiene que vencer consiste en reconocer en cuál casilla, que corresponda al mismo tiempo al multiplicando y al multiplicador, tendrá que escribir el número. En el material completo se hallan diez modelos en blanco para la tabla de Pitágoras. Cuando el niño es dueño de entregarse a estos ejercicios cómo y cuando quiere, y los ejecuta todos, puede afirmarse que ha aprendido la tabla de multiplicar.

TABLA RESUMIDA DE MULTIPLICAR
(conjunto de resultados dispuestos en columnas)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	50
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Simplificación de la tabla de multiplicar

Sentado que el orden de factores no altera el producto, y que para la memorización es el producto lo que precisa tener en cuenta, la tabla de multiplicación puede simplificarse incluyendo en ella solamente los productos distintos. Ahora bien, la mayor parte de los productos están repetidos simétricamente por encima y por debajo de aquellos que se encuentran a lo largo de la diagonal que va del uno al ciento; a lo largo de dicha diagonal se encuentran los productos del número multiplicado por sí mismo, es decir, los cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Eliminando las repeticiones simétricas resulta la tabla N (fig. 58) donde, para cada número, están las sucesivas combinaciones con la serie natural de los números hasta el cuadrado del que se considera; por ejemplo, en la misma línea se encontrará horizontalmente:

1 x 1= 1								
2 x 1= 2	2 x 2= 4							
3 x 1= 3	3 x 2= 6	3 x 3= 9						
4 x 1= 4	4 x 2= 8	4 x 3= 12	4 x 4= 16					
5 x 1= 5	5 x 2= 10	5 x 3= 15	5 x 4= 20	5 x 5= 25				
6 x 1= 6	6 x 2= 12	6 x 3= 18	6 x 4= 24	6 x 5= 30	6 x 6= 36			
7 x 1= 7	7 x 2= 14	7 x 3= 21	7 x 4= 28	7 x 5= 35	7 x 6= 42	7 x 7= 49		
8 x 1= 8	8 x 2= 16	8 x 3= 24	8 x 4= 32	8 x 5= 40	8 x 6= 48	8 x 7= 56	8 x 8= 64	
9 x 1= 9	9 x 2= 18	9 x 3= 27	9 x 4= 36	9 x 5= 45	9 x 6= 54	9 x 7= 63	9 x 8= 72	9 x 9= 81

Fig. 58 (Tabla N)

$2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$ y debajo
$3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$ y así sucesivamente.

Continuando la serie natural de los números hasta el nueve se da lugar a todas las combinaciones posibles, necesarias para el cálculo. En efecto; si se sobrepasa el cuadrado de un número, por ejemplo, el cuadrado de tres, la combinación sucesiva 3×4 no es sino la inversa de las combinaciones que hace el 4 antes de llegar a su cuadrado, y por esto está incluído en aquella serie como producto de la multiplicación del tres por el cuatro. Ello está representado en la sección A. de la tabla N. En esta se hallan las indicaciones necesarias para encontrar las combinaciones de cada número después de su cuadrado, descendiendo en sentido vertical hasta el plano del nueve. Las combinaciones inversas donde el número que hasta el cuadrado era el multiplicando, se convierte en multiplicador, pueden

1	1^2								
2	4	2^2							
3	6	9	3^2						
4	8	12	16	4^2					
5	10	15	20	25	5^2				
6	12	18	24	30	36	6^2			
7	14	21	28	35	42	49	7^2		
8	16	24	32	40	48	56	64	8^2	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	9^2

Fig 59

leerse en sentido inverso, yendo de derecha a izquierda y leyendo en cambio, 4×3, 5×3, etc., 3×4, 3×5, etc.

Las combinaciones que precisa memorizar son 45.

Escribiendo juntos los productos sólamente (es decir sin los factores) se obtiene la sección B de la tabla N. Esta es la completa simplificación de la tabla Pitagórica, primeramente, porque se detiene en el nueve, y además, porque indica solamente las combinaciones hasta los cuadrados.

Para facilitar la lectura, los números que representan los cuadrados están escritos con colores diversos y delimitados por una línea curva, mientras en relación con cada uno, está escrito con caracteres pequeños el número del cual representan los cuadrados.

Dada una multiplicación por sus factores, por ejemplo 3×7, para buscar el producto en la tabla, precisa tener en cuenta que 7 es mayor que 3, y por tanto, su producto se encontrará en la línea vertical. Basta entonces partir de la línea del 3 cuadrado y llegar hasta el plano del 7, lo que limita la zona de investigación. Sea, por ejemplo el producto 6×8; siendo 8 mayor que 6 basta partir del cuadrado de seis y descender verticalmente dos puntos para hallar el producto. También para la operación inversa, esta tabla facilita la labor. En efecto, queriendo multiplicar 8×6, el espacio correspondiente al seis está inmediatamente próximo y visible, porque el punto de partida que se encuentra es siempre el cuadrado de los números mismos.

La tabla de multiplicar así simplificada, en beneficio del cálculo, se puede integrar completando todas las combinaciones, distinguiendo, sin embargo, los que están más allá de los cuadrados (que son una repetición simétrica, casi una imagen vista en un espejo) con números todos iguales, como una sombra de las combinaciones esenciales. Tal estudio de observación es distinto del ejercicio necesario para la memorización de los resultados.

LAS JERARQUIAS

LAS JERARQUIAS

Hemos dicho anteriormente, que eran dos las dificultades a superar en la multiplicación :

a) la memorización de los productos, que se ha alcanzado con la serie de ejercicios descritos.

b) el rápido conocimiento del *lugar* ocupado por los mismos según el valor que representan, es decir, según las jerarquías.

Por lo que se refiere al lugar, no es ya necesario considerar los «valores efectivos» esto es, la cantidad real correspondiente a la cifra.

En todos los ejercicios desarrollados, hasta aquí jugaban cantidades reales, sea en cubos, cuadrados, bastones de 10 y perlas sueltas, tanto en el sistema decimal, como en los agrupamientos de bastones.

EL LUGAR SEGÚN LAS JERARQUÍAS

En estos ejercicios no entran ya las cantidades efectivamente representadas por los objetos (cubo, cuadrado, etc.) y que escindiéndose o uniéndose demuestran en la realidad cuantitativa los cambios que se hacen según el sistema decimal, o grupos esparcidos en un plano que se reunen en una torre de cubos ; todo este material atrayente no entra en juego. Aquí, solo se estudia la *posición* del número, *posición* que es relativa al «lugar» y no a la cantidad.

Así, por ejemplo, existen en la sociedad un rey, un ministro, un gobernador, un simple ciudadano. Todos ellos como hombres, son iguales, pero es la posición social la que les distingue en su valor administrativo.

Igual sucede con cualquiera de las nueve primeras cifras, que pueden significar humildes unidades o pueden representar millones ; es el puesto que ocupan el que hace reconocer su valor «relativo a su posición».

Hemos de encontrar, pues, un material que difiera por la posición y no por la cantidad y para ello recurrimos a representar la cantidad bajo forma de «símbolos».

Mas para indicar el valor de los símbolos, precisa resumir y esclarecer las cantidades efectivas que en ellos quieren representarse. Estos grupos representan una agregación de forma geométrica.

En efecto, la perla, un cuerpo sensiblemente igual en las tres dimensiones, representa un punto; el bastón una línea; el cuadrado una superficie. La línea respecto al punto, está determinada, porque constan de diez puntos, uno debajo de otro. (Una línea es un punto que se desliza dejando tras sí una huella). El cuadrado está constituído por diez bastones de uno junto al otro y se forma, como si la línea se desplazase en un trecho igual a su longitud, dejando huella (fig. 60).

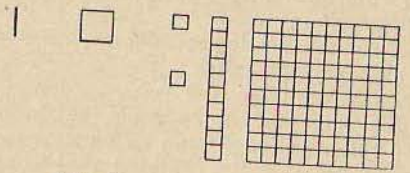


Fig. 60 Fig. 61

Estos tres grupos están constituídos por unidades simples.

Una unidad simple.
Diez unidades simples.
Cien » »

Cuando del cuadrado de perlas se pasa al cubo, sucede que se depositan uno sobre otro, diez cuadrados, aumentando de nivel. El cubo es igual en sus tres dimensiones como lo era la perla.

Ahora las tres jerarquías de las unidades simples están sobre el mismo plano. Si se colocase una pequeña tabla sobre las tres, se mantendría horizontal, apoyándose sobre el espesor correspondiente a una.

El cubo, en cambio, se ha elevado diez planos. Igual en las tres dimensiones, se le puede considerar como *una unidad colosal* perteneciente a un plano superior.

Si colocamos diez cubos, uno debajo del otro, se puede obtener una línea decimal relativa a esta nueva unidad que correspondería a 10.000 unidades simples o a diez unidades de millar.

Si después colocásemos, constituyendo un cuadrado, diez filas de diez cubos, se obtendría un cuadrado colosal hecho con cien cubos de perlas (cada uno de 1.000), es decir, un cuadrado cuyo valor es de 100.000 unidades simples, o sea de cien unidades de millar (fig. 61).

Estos tres grupos hechos de 1 cubo
» 10 cubos
» 100 cubos

pertenecen al mismo nivel, que es la altura del cubo. Si se colocase sobre los tres objetos una tabla, se apoyaría sobre todos ellos y quedaría horizontal. Tales grupos, pertenecen al mismo nivel.

Si tuviéramos diez cuadrados, como el construído con cien cubos, y se pusieran uno sobre otro, hasta constituír un cubo monumental, se pasaría a otro nivel que asciende de repente en diez alturas

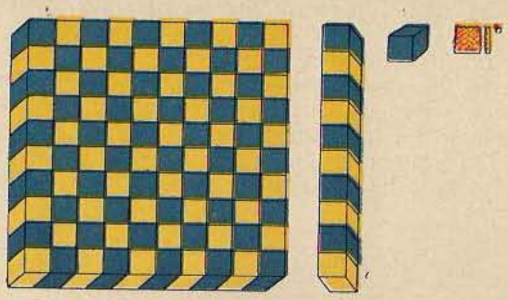


Fig. 62

de cubo. Este gran cubo construído con la superposición de diez cuadrados de 100.000 perlas cada uno, representaría el millón (figuras 62 y 63).

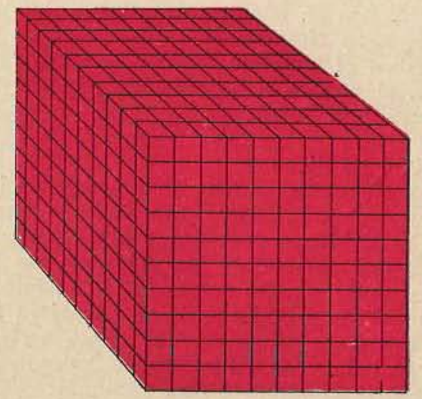


Fig. 63

Este sería la unidad de millón que ha ascendido al nivel de los millones y, en dicho nivel, se formarían, según el agrupamiento decimal, la línea de los diez millones y de los cien millones. Y así sucesivamente se proseguiría hasta el nivel del millar de millones, donde la unidad altísima e inmensa, tendría el valor de 1.000 millones, estas unidades sucesivas en los grupos de tres cifras, se llaman, después de los millones : billones, trillones, cuatrillones, etc.

Lo que hay que tener siempre presente, es este triple agrupamiento.

Punto.

Línea.

Cuadrado.

que siempre se repite, pero en *niveles diversos*, y que la unidad que resulta de la elevación del cuadrado precedente, es la que determina el nivel de los tres grupos.

Ahora, pues, los números tienen diverso valor según su posición y se distinguen yendo de derecha a izquierda ; *unidades, decenas, centenas*. Cada tres cifras, un espacio, un signo cualquiera de separación, que podría ser un punto o una coma, distingue los niveles diversos de los sucesivos grupos de tres.

Por ejemplo :

Millones	de millar			Simples		
unidades	centenas	decenas	unidades	centenas	decenas	unidades

Las cifras que representan valores se distinguen y se leen por grupos, esto es, centenas, decenas, unidades. Si las centenas, decenas y unidades se refieren a unidades simples, se dice el número sin añadir título ; si se trata de millares se añade el título mil y si se tratase de millones se añadiría la palabra millón. Para aprobar, para afirmar, se dice siempre sí ; si se trata de una persona sin importancia se dice sí simplemente, si se trata de una persona de calidad se dice, sí señor, si se trata de una elevada autoridad se dice, sí, Excelentísimo Señor.

Pues bien.

1.853.625.934 se dice :

mil ochocientos cincuenta y tres millones, seiscientos veinticinco mil, novecientos treinta y cuatro. No se cuenta más que por centenas, decenas y unidades y a este grupo de tres se le denomina según el nivel a que pertenecen las unidades que lo forman.

Los millones sobrepujan el nivel, a ras de suelo, de las unidades.

Ahora bien ; si la unidad simple se escogiera tan pequeña, que tuviera la altura de un milímetro, el ciento sería un cuadrado de un centímetro de lado y un milímetro de espesor.

El millar tendría la altura de un centímetro.

El millón de diez centímetros.

El millar de millones de un metro.

Leyendo, pues, el siguiente número, se dirá :

223.223.223

doscientos veintitrés millones.

doscientos veintitrés mil.

doscientos veintitrés.

Más allá del grupo de tres que se refiere a los millones se asciende al nivel de los millares de millones ; el millar de millones es como una montaña, construída superponiendo uno sobre otro diez cuadros de cien millones cada uno.

Se puede imaginar que la proporción continúa hasta el infinito y en tal caso, después de los millares de millón, vendrían las decenas de millar de millón, las centenas de millar de millón, el bi-

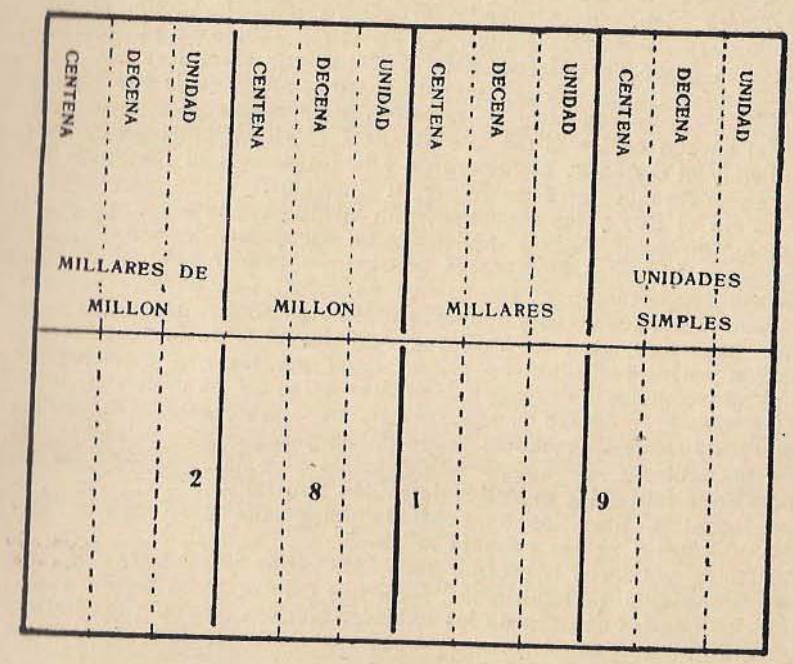


Fig. 64

llón, etc. Ahora precisa recordar, que las cifras son siempre *nueve*, las categorías son *tres*, pero las *castas*, divididas rígidamente y pertenecientes a niveles distintos, pueden ser infinitas.

He aquí representados en el cuadro adjunto (fig. 64) los lugares correspondientes a las cifras, según las jerarquías decimales de los números. Aquel 8, aún cuando sea un simple 8, se encuentra en el lugar de las decenas de millón y representa, por lo tanto, 80 millones. Aquel 9 a la derecha, es un nueve como otro cualquiera, pero aún cuando parezca mayor que ocho, supone mucho menos, toda vez que está en el lugar de las centenas simples y tiene un valor de 900. El uno que parece el menor de todos aquellos números se encuentra en el tercer lugar de los millares y tiene por ello un valor de 100.000. El 2 que se encuentra más a la izquierda y nada menos que en el lugar de los millares de millón, representa 2.000 millones y está en el umbral de los números fantásticos.

El valor, pues, está dado por el lugar que ocupan las cifras y cada lugar está rigurosamente determinado.

Ahora bien, no existiendo un cuadro indicador como el aquí usado para demostrar el lugar de las cifras ¿cómo se puede reconocer el grado de cada una? Es evidente que si el Rey está sentado sobre el trono y el Presidente sobre el sillón de la Presidencia del Consejo de Ministros se reconoce inmediatamente su jerarquía, como sucede en las cifras citadas. Está escrito encima *decenas de millón* y el 8 que se encuentra en aquel espacio que las líneas separan se reconoce en seguida por su alto valor.

Pero el Rey y los ministros, aún cuando vayan sin trono y sin sillón, son siempre rey y ministros. Así sucede con las cifras, y por eso debe indicarse siempre el puesto que ocupan, porque es ese puesto precisamente el que indica su valor. Los puestos vendrán indicados por los ceros y mientras más ceros acompañan a una cifra más importante es ésta. Así, por ejemplo, el 8 de las decenas de millón estará precedido en primer lugar por los tres ceros de las unidades simples y después por los tres ceros de los millares y tanto el primer grupo como el segundo, de tres ceros, estarán separados entre sí. De igual modo el grupo de los millares se distinguirá del de los millones, y en este último grupo el 8 irá precedido de un cero, que indica las unidades de millón que faltan.

Aquel 8, pues, se ha separado del cuadro y se escribe así: 80.000.000 y se lee ochenta millones.

Si se volviesen a escribir todas las cifras que hemos señalado en el cuadrado, no tendríamos, sino, ¡que colocar ceros según las distancias que las separan de las unidades simples, y según los lugares vacíos que quedan entre una y otra, separando siempre entre sí los grupos de tres.

2.080.100.900

En este caso están indicados

dos millones (o dos billones)
ochenta millones
cien mil
novecientos

Si un gran número comprende la presencia de todas las categorías que preceden a la cifra más alta, las cantidades están indicadas por el lugar que ocupan. Por ejemplo 25.847, veinticinco mil, ochocientos cuarenta y siete. Estos números se nombran distintamente uno después del otro, como podríamos decir cuatro iglesias,

cinco palacios, nueve casas, tres cabañas y se pueden escribir separadamente

veinte y cinco	mil	20.000 5.000
ochocientos		800
cuarenta y		40
siete		7

Así, por ejemplo, el número siguiente 2.462.938 que se lee enumerando las cifras según su rango y comenzando por la de más valor, se puede escribir:

dos millones		2.000.000
cuatrocientos sesenta y dos	mil	400.000 60.000 2.000
novecientos		900
treinta y		30
ocho		8

Ahora no se lee cifra por cifra, sino grupo de tres por grupo de tres, dando al grupo entero después de haber nombrado las cifras que a él pertenecen, el título que tienen común. Así pues, no se dice cuatrocientos mil, sesenta mil, dos mil, sino cuatrocientos sesenta y dos mil.

Como diríamos: Sus majestades el Rey y la Reina.
o también: Sus Excelencias los Ministros de Gobernación y Estado.

Las explicaciones dadas, sobre las jerarquías decimales de los números, son solamente una introducción, como sería el brillante anuncio de un espectáculo, para asistir al cual, precisa, sin embargo, entrar y permanecer largamente inmóviles durante su desarrollo.

El niño no aprende oyendo una explicación, profundiza el conocimiento solamente siguiendo un trabajo activo, y con frecuencia, se ejercita larga y pacientemente sobre la misma cosa (ya comprendida), lo que manifiesta una actitud mental, una necesidad psíquica, que hasta entonces no había sido tenida en cuenta.

Nosotros, pues, ofrecemos un «material» para los ejercicios individuales sobre las jerarquías de los números. Las unidades están representadas indistintamente por una perla y las perlas son de tres colores diversos según representen 1, 10, 100 de los grupos que tienen el mismo nivel. Están unidas por un hilo de alambre a un marco o bastidor, y ello fija y hace distinguir su posición.

Este material está constituído por bastidores que tienen el aspecto corriente de los que sirven para aprender a contar. El primer bastidor llega, sólo a comprender las unidades de millar y, el segundo, se extiende hasta las unidades de millón.

El bastidor de los millares tiene cuatro hilos transversales fijos, sobre cada uno de los cuales hay enfiladas diez perlas. Los tres hilos superiores son equidistantes, pero entre el tercero y el cuarto existe un espacio mayor. También, en el marco se distinguen los grupos, y en el trozo correspondiente a los tres hilos equidistantes, tiene su color distinto (más claro) que en aquel donde se fija el cuarto hilo más distante.

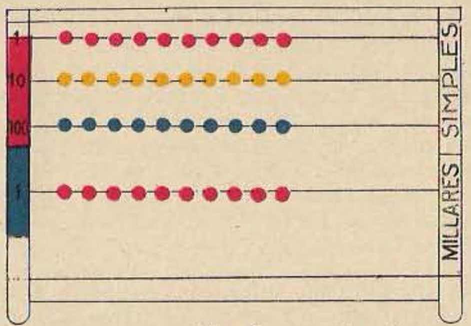


Fig. 65

Fig. 66

Las perlas no tienen el mismo color. Los tres hilos tienen cada uno perlas de color distinto que las del otro hilo ; las primeras son rojas, las segundas azules, las terceras amarillas. En el cuarto hilo separado, se vuelve al color rojo.

Rojo-unidades
Azul-decenas
Amarillo-centenas

Análogamente se ha construído el bastidor de los millones donde existe un grupo de tres hilos separado de otro grupo de tres hilos que a su vez se separa del último hilo.

Pero los dos grupos de tres hilos tienen en correspondencia los mismos colores, rojo, azul, amarillo. El marco donde se fijan los hilos es de color diverso en correspondencia con los dos grupos de tres, así como con el último hilo.

Sobre un lado del marco está indicado el valor de cada uno del grupo : unidad, decenas, centenas. En el otro lado está indicado el nivel del grupo : millares, millones.

Acompañan a los bastidores trozos de papel rayados adecuadamente, con indicación del puesto de los números según las jerarquías.

LA COMPOSICIÓN DE LOS GRANDES NÚMEROS

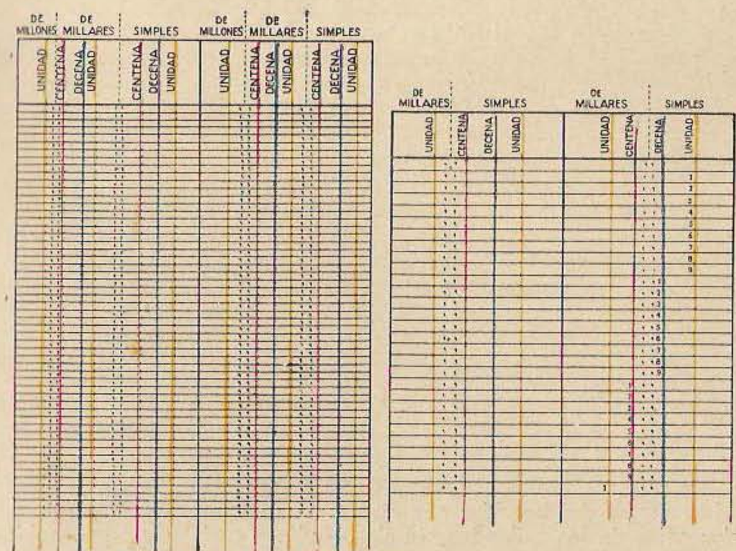


Fig. 67

Si en el bastidor se colocan las perlas como indica la figura, se compone el número 2435.

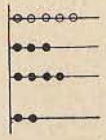


Fig. 68

Este se compone de 2 (del 1000)
4 (del 100)
3 (del 10)
5 (del 1)

o lo que es igual 2.000
400
30
5

y considerando las perlas una a una, tendremos:

1000)
(2.000
1000)

100)
100)
100 (400
100)

10)
10 (30
10)

1)
1)
1 (5
1)
1)

2435

Las perlas del bastidor son, pues, símbolos de los valores. Las perlas rojas de las unidades simples, indican cada una, una unidad, como lo indicaban las perlas sueltas. Las perlas azules del mismo grupo, tienen, cada una, el valor de una decena, como uno de los

bastones de diez. Cada perla amarilla tiene el valor de un cuadrado de 100 y cada perla roja del cuarto hilo, tiene el valor de un cubo de mil.

Aquí es la *posición* la que indica el valor y no la cantidad efectiva.

El primer ejercicio lo comprueba y consiste en desplazar una a una todas las perlas del bastidor escribiendo el número de las sucesivas acumulaciones en el papel correspondiente. Se desplaza una perla y se escribe el uno, se desplaza otra, haciéndola correr hasta que se una a la anterior, y se escribe el 2 debajo del uno y así sucesivamente. Después de haber desplazado la novena perla, queda una todavía, pero desde el momento en que ésta—la décima—se coloca junto a la novena, todo el conjunto va desplazado al otro lado, como estaban antes de comenzarse el ejercicio y *en vez de las diez perlas de arriba* se hace avanzar la primera perla azul de las decenas.

Sobre la hoja se escribe 1, pero debajo de la indicación de las decenas y se continuan desplazando una a una las perlas de las decenas escribiendo los números uno debajo del otro hasta el nueve, al llegar al cual, se reproduce el mismo hecho de desplazamiento de todas las decenas y de avance de una perla de la centena.

Así las nueve cifras se escriben una debajo de otra desplazando siempre un espacio las cifras sucesivas.

Si ahora se ponen ceros en los lugares vacíos, se comprueba, como éstos indican precisamente estos desplazamientos, convirtiendo las filas sucesivas en 10, 20, etc., 100, 200, etc.

Habiendo puesto los ceros se hace inútil la separación indicadora: la relación entre los números:

10
20
30, etc.

100
200
300, etc.

(Está claramente colocada con la posición 9 se refiere al valor de las perlas de diferentes rangos en el bastidor.)

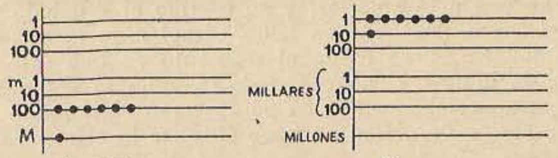
Todos los ejercicios que pueden hacerse con los bastidores, refuerzan el estudio de las «posiciones» en relación con el valor relativo de los números.

Dichos ejercicios sirven para ilustrar uno de los detalles del sistema decimal y forman parte del estudio de dicho sistema. Pero ¿en qué pueden consistir dichos ejercicios? Evidentemente en desplazamientos, composiciones, descomposiciones y sustituciones, esto es: en la formación de los grandes números en las operaciones aritméticas.

No hay ninguna mayor dificultad en desplazar o contar las perlas en la cuarta fila que en la primera. Ni es más difícil hacer retroceder toda la fila del 100 para substituirla con una perla del 1000 que hacer retroceder toda la fila de las unidades simples para substituirla con una perla de las decenas.

Por lo tanto, no será más difícil el cálculo con los grandes números si su posición es bien clara.

Por ejemplo : 1.600.0000 y 16



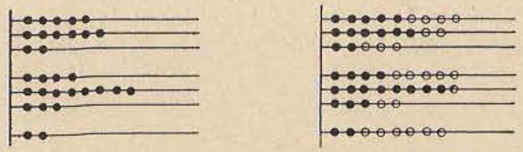
1.600.000 16

Fig. 69

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Si queremos sumar los números 2.384.265
\+ 6.215.324

se realizará, evidentemente, una acumulación de perlas de todas las filas

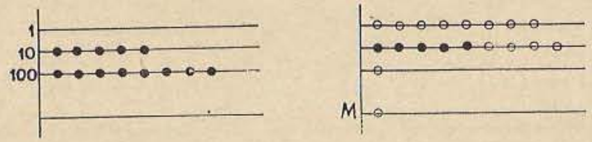


2.384.265 + 6.215234 = 8.599.589
Fig. 70

La suma total se lee contando las perlas resultado en cada fila, que son

8.000.000
500.000
90.000
9.000
500
80
9

Ahora bien : si la suma hace acumular un grupo de diez perlas, éste desaparece retrocediendo completamente y, en su lugar, avanza una perla del valor superior.



850 + 348 = 1198

1198 = 1.000
100
90
8

Fig. 71

SUSTRACCIÓN

La sustracción se lleva a cabo sobre el bastidor de modo que se obtenga lo que queda de la cantidad primitiva después de haber sido disminuída en el sustraendo. Por ejemplo :
8649 — 4236

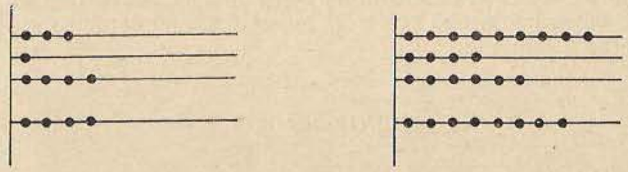


Fig. 72

8.649 — 4.236 = 4.413

Se ha llevado a cabo la sustracción en cada una de las filas.

8000	—	4000	=	4.000
600	—	200	=	400
40	—	30	=	10
9	—	6	=	3

Si la sustración no se puede realizar tan fácilmente, porque en cualquiera de los hilos existe un número de perlas inferior al que se debe restar, se comienza por quitar todas las que se encuentren en el hilo y, después, se vuelve a colocar en el hilo vacío un grupo entero de 10 perlas, después de haber quitado una perla del valor superior.

Por ejemplo 7456 — 1832

7.456 — 1.832 = 5.624

Fig. 73

La operación se realizó en la siguiente forma :
6 — 2 = 4
50 — 30 = 20

En la fila de las centenas se quitaron, primero las cuatro perlas existentes y, las otras cuatro perlas, se tomaron de una fila entera de 10 que representa la sustitución de las perlas de los millares que se ha quitado.

Es decir, que primero se hizo 4 — 4 = 0
después 10 — 4 = 6

Mientras tanto, los siete millares se habían convertido en seis y como de éstos había que restar el millar del sustraendo, quedan cinco millares solamente.

MULTIPLICACIÓN

Las multiplicaciones que se refieren al «lugar», y por lo mismo al «valor» de los números, son aquellas que los desplazan de uno a otro grado decimal ; esto es, la multiplicación de un número por 10, 100, 1000 etc. Multiplicar por 10 el número 4 indicado en el bastidor menor (fig. 74) quiere decir obtener cuatro decenas en vez de cuatro unidades ; las unidades al ir al lugar adquirido dejan cero, es decir, el vacío, en el lugar que ocupaban antes. 40.

Si se encuentran en la fila de los millares y quedan vacíos los espacios de orden inferior, serán 4000.

Esta última es una multiplicación de decenas por centenas. Los espacios vacíos se han sumado :

$$10 \times 100 = 1000$$
$$\text{y} \quad 40 \times 100 = 4000$$

Los espacios indicados se expresan al escribir el número con otros tantos ceros.

Sea ahora 50 × 1000. Cada uno de los valores se desplaza tres espacios manteniendo la posición recíproca, es decir, el tres

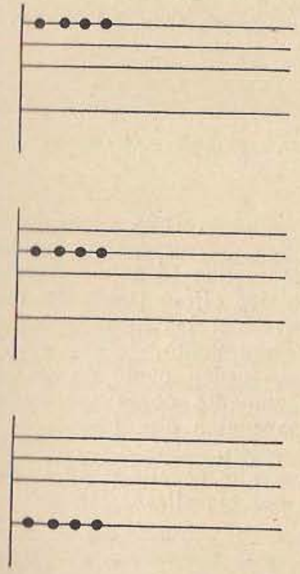


Fig. 74

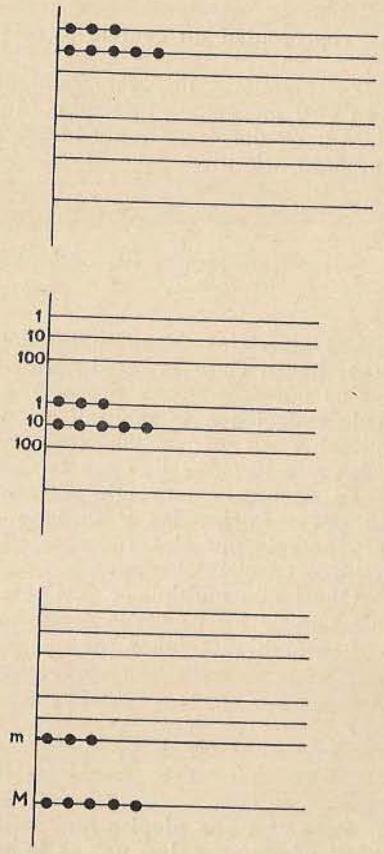


Fig. 75

va a la línea de las unidades de millar y el cinco a la de las decenas de millar. El desplazamiento de los tres espacios se indica en cifras añadiendo tres ceros.

$$53 \times 1000 = 50 \times 1000 + 3 \times 1000$$
$$= 50.000 + 3.000 = 53.000$$

Si ahora este número se multiplica por 100 se desplaza otros dos espacios conservando siempre entre los componentes la relativa posición : 5.300.000 (Fig. 75).

Estos son los ejercicios que pueden repetirse indefinidamente y que representan un estudio directo de las «posiciones» de los números.

Los ejercicios de desplazamiento acompañados de la escritura hacen casi mecánico el cálculo. Multiplicar por 10, 100, 1000 etc. quiere decir desplazar y por lo mismo añadir uno, dos, o tres, ceros al número primitivo.

MULTIPLICACIÓN DE GRANDES CIFRAS SOBRE BASTIDOR

Los ejercicios de multiplicación de grandes cifras sobre bastidores, hacen clara la separación de las dos dificultades explicadas.

Los números deben prepararse en forma que toda la operación quede reducida a la multiplicación entre dos cifras (tabla de multiplicar), pero lo más laborioso será determinar las filas de perlas, en las que hay que llevar a cabo el desplazamiento.

Es necesario para ello, determinar un orden como quien desliga cosas intrincadas y dispone separadamente cosas mezcladas. Para hacerlo, precisa recordar varios conceptos que fueron desarrollados en ejercicios paralelos de preparación.

Queriendo multiplicar 2847 × 4 hay que repetir cuatro veces cada uno de los números representados por las cifras.

Las multiplicaciones son :

2 × 4
8 × 4
4 × 4
7 × 4

Pero ¿en qué nivel o fila?

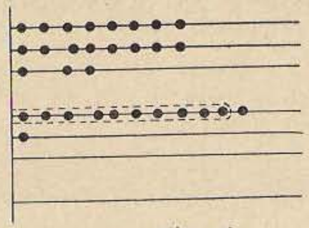
El número, realmente, es la suma de :

2000	2 (1000)
800	8 (100)
40	4 (10)
7	7 × 1

Por lo tanto, las multiplicaciones deben colocarse así :

4 × 2	sobre	la línea	del	1000
4 × 8	sobre	la línea	del	100
4 × 4	id.	id.	del	10
4 × 7	id.	id.	del	1

Llevándolo a cabo sobre el bastidor



4 + 7 = 28
4 + 4 = 16
4 + 8 = 32
4 + 2 = 8

Fig. 76

Habiéndose formado un diez sobre la línea del mil, desaparece la fila y, como consecuencia, avanza una perla en la línea del 10.000

El producto se lee, deduciendo de la disposición de las perlas : 11.388.

En cualquier forma en que se muevan las perlas, bien sea comenzando por las unidades, los millares o, a saltos, se obtiene siempre el mismo resultado, porque el producto no depende de la serie de los valores, sino, de la posición de éstos. Con tal que cada uno se coloque en el lugar que le corresponde, el resultado es justo y seguro.

Es como si en un teatro existen palcos regios, palcos para el cuerpo diplomático, butacas numeradas y entradas de paseo. El orden de los espectadores no dependerá del hecho de entrar antes o después, sino de que cada uno se coloque en el lugar que le corresponde.

Esto no se puede revelar efectuando las operaciones con cifras escritas, porque las sumas parciales, sin el orden que comienza de los valores inferiores hacia los superiores, no se podrían adicionar sin tachaduras y confusiones. Por ello, en la multiplicación con cifras aparece, como esencial, el orden de éstas, mientras que lo único esencial es la *colocación* según las jerarquías.

Veamos ahora una multiplicación donde el multiplicador es de dos cifras :

342 × 36

Cada número del multiplicando debe ser multiplicado por cada número del multiplicador ; es decir, se deben multiplicar todos por 3 y después, todos por 6. Son, pues, dos grupos, el del 3 y el del 6 se debe representar así :

3 × 3 = 9	6 × 3 = 18
3 × 4 = 12	6 × 4 = 24
3 × 2 = 6	6 × 2 = 12

y por lo mismo dos multiplicaciones distintas del número 342.

¿Sobre qué fila de perlas se deben colocar aquellos productos? Para esto precisa hacer el análisis de valores.

Los números son

30 × 300		6 × 300
30 × 40	y	6 × 40
30 × 2		6 × 2

En el grupo del tres se tienen dos operaciones diferentes porque 30 es igual a 3 × 10 y la multiplicación por 10 significa el desplazamiento de una línea.

Por esto, el grupo del tres por lo que a los valores se refiere, se debe representar así :

3 × 3000
3 × 400
3 × 20

Los grupos, pues, se colocan del siguiente modo :

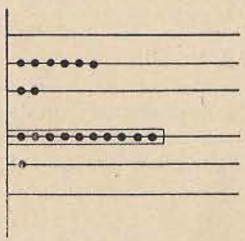
3 × 3 (sobre la línea del 1000)
3 × 4 (» » 100)
3 × 2 (» » 10)

6 × 3 (sobre la línea del 100)
6 × 4 (» » 10)
6 × 2 (» » 1)

Lo importante, es que los productos indicados por las cifras vengas colocados en el lugar indicado por los valores.

Se pueden hacer primeramente, todos los desplazamientos relativos al grupo del 3 y después, todos los relativos al grupo del 6 o viceversa.

De este modo obtenemos un producto parcial 10.260, sobre el cual, se acumula el producto del otro grupo.



3 + 2 = 6
3 + 4 = 12
3 + 3 = 9

Fig 77

Fig. 78

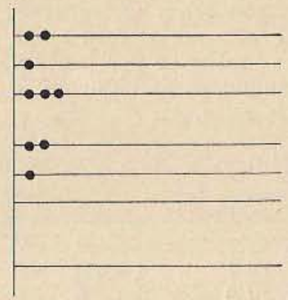


Fig. 79

En el segundo producto (fig. 78) se producen dos cambios sobre las líneas del 10 y del 100.

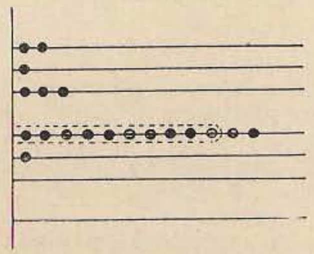
El producto total estaría sobre el marco como en la (fig. 79).

Las perlas que señalan el producto final indican el número 12.312.

Se puede hacer una simplificación en la labor descrita, es decir : se pueden agrupar todas las multiplicaciones relativas a una fila o—lo que es igual—colocar juntas todas las multiplicaciones relativas a un solo valor.

Línea del 1000. —	3 × 3	=	9	= 9
100. —	3 × 4 ; 6 × 3	=	12 + 18	= 30
10. —	3 × 2 ; 6 × 4	=	6 + 24	= 30
1. —	6 × 2	=		= 12

El producto, después de un cambio efectuado en la fila de 1000, ha resultado 12312 (fig. 80).



12
30
30
12

Fig. 80

Estos ejercicios que representados por figuras parecen complicados, se convierten en sencillos y atrayentes, sobre el material, donde cada vez que se forma una fila entera de 10 desaparece realmente y es sustituída por una perla en la fila sucesiva, demostrando que las cantidades se sutilizan a medida que van encaminándose a valores más altos.

Representamos ahora una multiplicación muy grande :

2836 × 324.

2.000			300
800)	×	(	20
30)		(	4
6			

2000 × 300	200.000 × 3	3 × 2 (línea del 100.000)
800 × 300	80.000 × 3	3 × 8 (» » 10.000)
30 × 300	3.000 × 3	3 × 3 (» » 1.000)
6 × 300	600 × 3	3 × 6 (» » 100)
2000 × 20	20.000 × 2	2 × 2 (línea del 10.000)
800 × 20	8.000 × 2	2 × 8 (» » 1.000)
30 × 20	300 × 2	2 × 3 (» » 100)
6 × 20	60 × 2	2 × 6 (» » 10)
2000 × 4		4 × 2 (línea del 1.000)
800 × 4		4 × 8 (» » 100)
30 × 4		4 × 3 (» » 10)
6 × 4		4 × 6 (» » 1)

Se pueden efectuar los desplazamientos sobre el marco en tres tiempos sucesivos, según los tres grupos indicados en su colocación respecto a los valores : o también se pueden reunir los grupos del mismo valor y efectuar un solo desplazamiento.

línea del 100.000	: 3 × 2 = 6	= 6
» » 10.000	: 3 × 8 ; 2 × 2 = 24 + 4	= 28
» » 1.000	: 3 × 3 ; 2 × 8 ; 4 × 2 9 + 16 + 8	= 33
» » 100	: 3 × 6 ; 2 × 3 ; 4 × 8=18 + 6 + 32	= 56
» » 10	: 2 × 6 ; 4 × 3 = 12 + 12	= 24
» » 1	: 4 × 6 = 4	= 24

El producto total indicado en el marco es 918.864.

Las descripciones efectuadas hasta ahora, tenían por finalidad

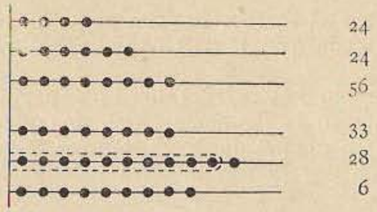


Fig. 81

el estudiar separadamente los elementos que concurren en la ejecución de una multiplicación de grandes cifras.

En el material siguiente, en cambio, se realiza la multiplicación de modo, que el orden de sucesión en las varias operaciones concurrentes sea, como lo es, en el procedimiento corriente donde las cifras, permaneciendo escritas, no pueden desplazarse y ello está originado por un factor que se refiere a la ejecución práctica del cálculo escrito y no a la esencia misma del juego de los números en la multiplicación : el otro factor siendo el pasaje de grupos según el sistema decimal : es decir, empezando por las unidades simples y desplazando en un conjunto con el cálculo.

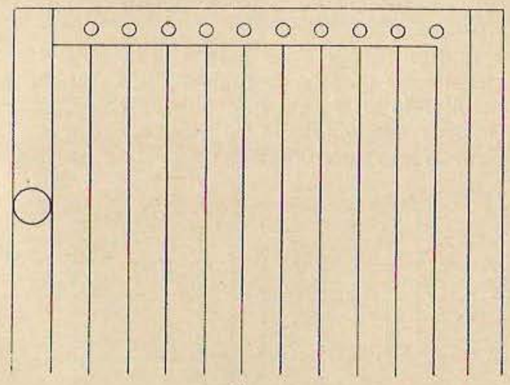


Fig. 82

El material consiste en un marco donde los hilos (fig. 82) están colocados verticalmente, sin la distinción, de grupos de tres, esto es, equidistantes y en número superior a siete (hasta las centenas de millón). En cada hilo están enfiladas 10 perlas sin distinción de colores, es decir que las perlas de todos los hilos son del mismo color.

Las perlas se bajan desde la parte superior cuando se desplazan para efectuar la operación y a cada hilo corresponde, en un pequeño eje transversal en el fondo, un cero.

A la derecha, sobre el marco, hay un pequeño hueco redondeado donde se coloca cada vez la cifra relativa al multiplicador en acción.

Unido a este aparato hay varias fajas de papel con pequeñas subdivisiones que indican la distancia entre uno y otro hilo. Sobre el papel, y teniendo en cuenta dichas distancias, se escribe el multiplicando comenzando por la última cifra relativa al multiplicador en acción.

Unido a este aparato hay varias fajas de papel con pequeñas subdivisiones que indican la distancia entre uno y otro hilo. Sobre el papel, y, teniendo en cuenta dichas distancias, se escribe el multiplicando comenzando por la última cifra de la derecha (unidades simples).

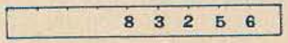


Fig. 83

Así se escribiría el número 83256.

El análisis del número se realiza únicamente con el multiplicador. Por ejemplo, supongamos 83256 × 347.

El multiplicador se descompone así : 300
40
7

Cuando se multiplica por 7 se coloca el disco del 7 en el hueco redondeado lateral y se efectúa la multiplicación según las cifras del multiplicando enfilando en forma que cubran todos los ceros.

(fig. 84). Primer producto 583.792.

Para la segunda cifra del multiplicador que es una decena (40)

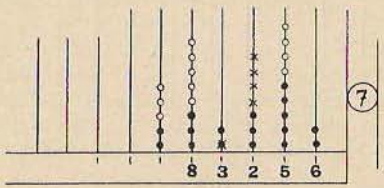


Fig. 84

se desplaza la faja de papel que contiene el multiplicando, de modo, que permanezca descubierto el primer seis (multiplicación por 10), y se coloca en el espacio de la derecha el número 4. Dejando en su puesto las perlas ya desplazadas se prosigue la multiplicación del número, comenzando por las unidades y prosiguiendo en igual forma que la vez anterior. Es evidente que cada vez que en una fila se alcance el número 10 toda la fila se desplaza y en su lugar se baja una perla del valor superior.

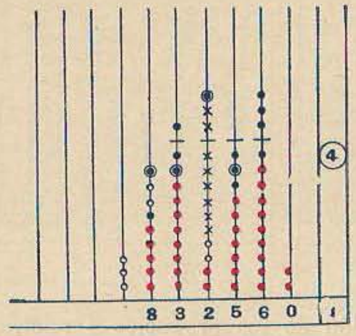


Fig. 85

El segundo producto, que viene añadido al primero, alcanza un total de 3.913.032.

Para la tercera cifra (centena) del multiplicador se desplaza dos ceros de la faja del multiplicando y se coloca la cifra en acción— el 3 en el disco lateral, permaneciendo en el mismo lugar todas las perlas desplazadas hasta ahora.

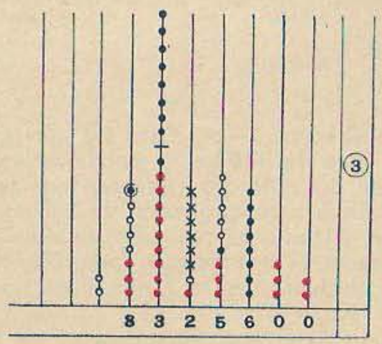


Fig. 86

El total es 28.889.832.

Las perlas se encontrarán dispuestas sobre el marco en la forma que indica la figura 87.

La multiplicación efectuada ha sido 83.256 × 347 = 28.889.832.

La ejecución de la operación con cifras, al no permitir la in-

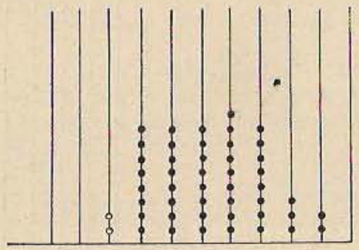


Fig. 87

mediata acumulación de los productos parciales, obliga a escribir éstos separadamente, colocando en columna los relativos al mismo valor y después se suman dichos productos. Se comprende, porque a cada nuevo producto parcial, éste debe iniciarse bajo la cifra del multiplicador en acción.

```
  83256
  × 347
-------
 582792
333024
249768
-------
28889832
```

El material no sirve para «enseñar» las operaciones aritméticas, ni mucho menos para facilitarlas o simplificarlas. Su finalidad es entretener la mente del niño con ejercicios que le llevan a razonar y conducirla a la busca y comprobación de hechos que se presentan de modo atrayente. El niño ha realizado un estudio del sistema decimal y ha analizado y profundizado procedimientos que le conducen, no sólo a efectuar, sino a comprender las operaciones aritméticas.

Si el niño se ha interesado directamente en las operaciones y ha comprendido cómo se efectuán : *él buscará encontrar los resultados*, por el camino más breve y con el mínimo esfuerzo.

Entonces abandonará el material y querrá efectuarlas sin esa ayuda.

En efecto, llega un momento en que el niño deja el material y efectúa las operaciones usando números que alcanzan algunas veces a los billones.

Si el material, en cambio, hubiese servido para facilitar y simplificar los cálculos, el alumno seguiría asido a la ayuda del material que habría disminuído en él la energía de expansión. Sola-

mente, cuando el esfuerzo de la pesquisa, la claridad del hecho y la persuasión, nos han hecho dueños de un procedimiento, buscamos el alcanzar la finalidad perseguida por el camino más breve posible. La lentitud en el análisis conviene en el período *formativo* y prepara la rapidez y la extensión de la aplicación.

```
        22364253 ×
       345234611
----------------
        22364253
       22364253
     134185518
     89457012
    67092759
   44728506
  89457012
 111821265
67092759
----------------
7720914184760583
```

Ejemplo de una multiplicación gigantesca implantada y ejecutada por los niños, sin material.

LA DIVISION

LA DIVISION ANALIZADA

Los ejercicios colectivos con los juegos de perlas del sistema decimal, que sirven para una primera representación material de la división, con cubos de mil, cuadrados, etc., son substituídos en un ejercicio paralelo por otro material, que se presta a trabajos individuales e inicia en las operaciones escritas. En el primer ejercicio (división de pequeños números por una cifra) accesible a niños pequeños, se utiliza un material análogo al empleado para aprender la tabla de multiplicación, mas, para la iniciación se pueden usar las mismas tablas descritas, apropósito de la memorización de la tabla pitagórica ; solamente son distintas las hojas donde se anotan los cálculos.

PROCEDIMIENTO

Se toma al azar un número cualquiera de perlas de la cajita y se cuentan. Supongamos que hay 27 perlas : este número se escribe en el primer espacio en blanco de la hoja de las divisiones.

Después, tomando el cartón cuadrado con los cien huecos y la caja de las perlas, se procede a la operación.

Supongamos que se trata de dividir 27 entre 10. Pondremos primero diez perlas al lado, debajo del 1 ; luego otra columna de diez perlas al lado, debajo del 2. Para completar la columna que vamos a poner debajo del 3 no hay bastantes perlas, pues no quedan más que siete.

Entonces el 2 se escribe en la línea horizontal, después del 10, y a su derecha, en la columna de los residuos, se escribe 7.

Dividamos ahora la misma cantidad por 9. Para ello se coloca debajo del 1 una columna de nueve perlas ; debajo del 2 otra columna de nueve perlas ; debajo del 3, otra columna de nueve perlas. Vemos en este caso que no queda ningún residuo. Entonces en la línea que coresponde al 9 se escribe la cifra 3.

Para dividir por 8, el niño dispone de 8 perlas en columna vertical debajo del 1 ; otra columna debajo del 2 ; otra debajo del 3. Quedan aquí, como resíduo en la columna 4, sólo tres perlas. Y así sucesivamente.

Para las divisiones escritas, el niño dispone de un paquete con

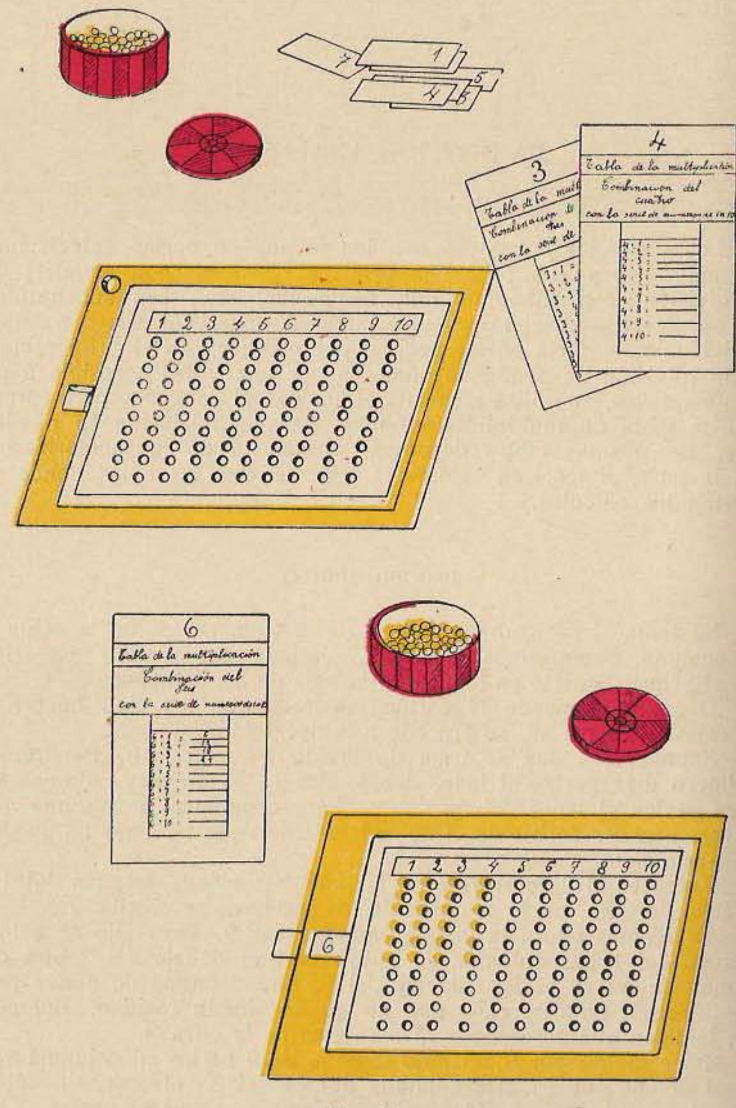
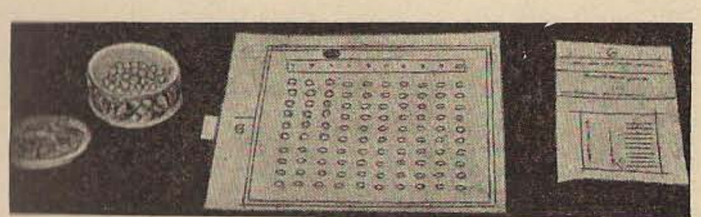


Fig. 88

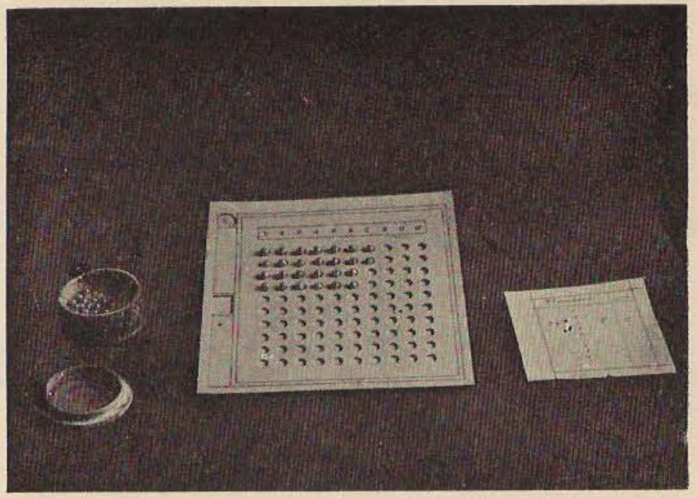
EL MATERIAL

cien hojas, dispuestas como la del grabado, envueltas en una artística cubierta, atada con una cinta de seda. En cambio, los modelos para las tablas parciales de multiplicación, con sus respectivas tablas pitagóricas y de confrontación, están metidas en un sobre de pergamino con ribetes de piel.

	DIVISIÓN	RESIDUO
: 2 =	....	....
: 3 =	....	....
: 4 =	....	....
: 5 =	....	....
27 : 6 =	....	....
: 7 =	....	....
: 8 =	3	3
: 9 =	3	....
: 10 =	2	7



Material de la tabla pitagórica, usado para la división



Una división ejecutada sobre el material y transcrita al papel

División		Residuo
: 2 =	....	....
: 3 =	....	....
: 4 =	....	....
: 5 =	....	....
: 6 =	....	....
: 7 =	....	....
: 8 =	....	....
: 9 =	....	....
: 10 =	....	....

DIVISION DE GRANDES NUMEROS POR VARIAS CIFRAS

Es posible, también, reproducir con el material de las perlas las divisiones que tengan varias cifras en el divisor, y esto puede llegar a ser un «pasatiempo aritmético» muy adecuado para emplear la actividad del niño cuando está en su casa. Este trabajo que aclara los procedimientos de las operaciones, es casi una *aritmética racional* que se sobrepone a la empírica, la cual reduce el mecanismo de las operaciones abstractas a una simple *rutina*. Estos «pasatiempos» abren el camino a la aritmética razonada, que espera al niño en los grados superiores.

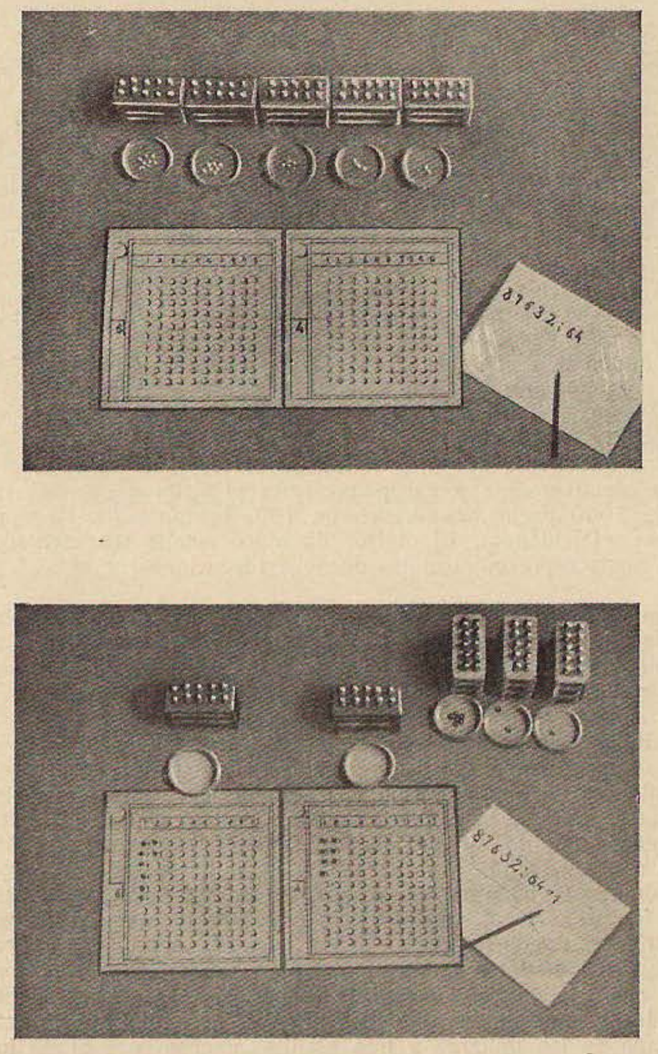
También la división se utiliza como ejercicio de aplicación que sirve para adquirir un conocimiento rápido y práctico del *lugar* de los números, en relación con el valor jerárquico que representan. En los ejercicios primitivos servía para demostrar el hecho de una cantidad que había de subdividirse en partes iguales, cantidad que existía efectivamente y agrupada según el sistema decimal en cubos de 1000 perlas, cuadrados de 100, bastones de 10 y perlas aisladas. (Dividendo). El divisor dinámico estaba representado por niños, unos representaban las decenas (decuriones) y otros las unidades.

Aquí, en cambio, (como se ha visto para la multiplicación) las cantidades están representadas simbólicamente, una perla puede simbolizar las cantidades numéricas más diversas, decenas de millar o millones, pero es el *lugar que ocupa* la perla el que indica el valor representado.

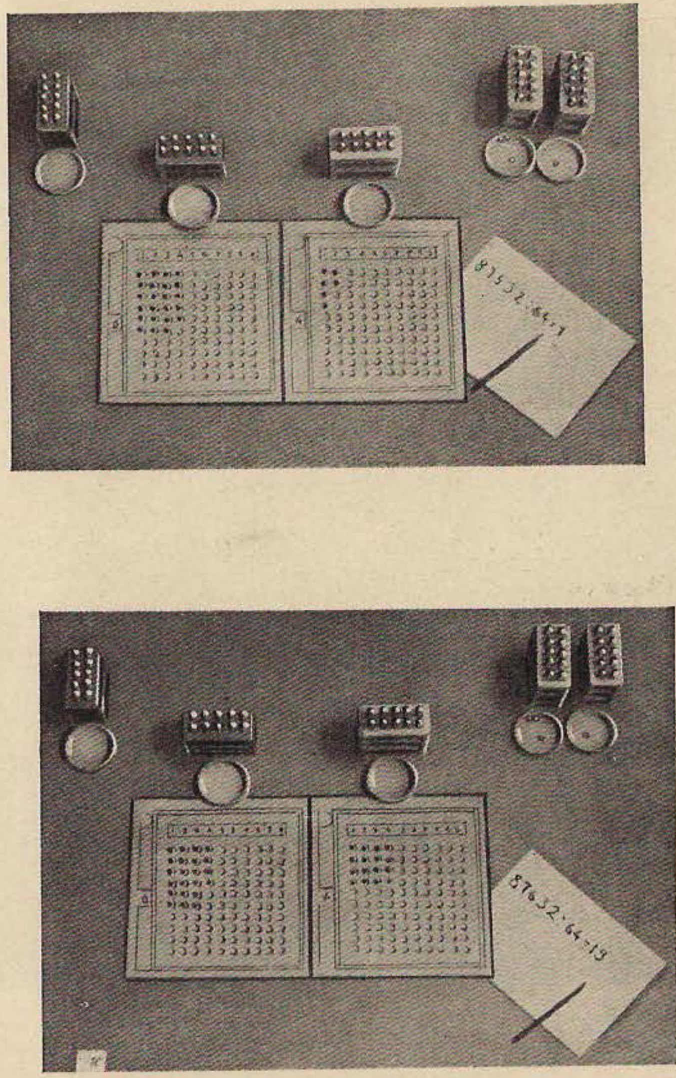
También los colores ayudan a diferenciar las posiciones como en el caso de la multiplicación ; y usamos perlas que si representan las unidades son de color rojo, azul si son decenas, etc. Y esto permanece constante para fijar la idea, ya explicada de los grupos jerárquicos : punto, línea y cuadrado. Estos tres grupos pueden hallarse a nivel distinto (unidades simples, millares, millones, etc.)

Como la división es, por excelencia, la operación en la que precisa siempre *separar,* no es posible utilizar el material de marcos o bastidores donde las perlas están fijas. Por ello, y para representar aquí los distintos niveles de grupos numéricos, usaremos platillos que pueden contener perlas separadas ; tres platillos blancos para los grupos de las unidades simples, tres platillos grises para el grupo de los millares y tres platillos negros para el de los millones.

Con objeto de facilitar los cambios, se ha preparado un material de depósito, consistente en varios tubos de vidrio, que contienen una sobre otra, diez perlas. Los tubos, según los grupos, tienen las perlas de los colores dichos y están sostenidos por una especie de



Cuatro tiempos sucesivos de una división de más cifras
ejecutada con el material



Cuatro tiempos sucesivos de una división de más cifras
ejecutada con el material

Niña que hace una división de más cifras

porta-probetas que son blancas, grises o negras. Todo ello para facilitar los cambios y evitar la fatiga inútil de contar diez perlas cada vez.

Nada mejor que este depósito demuestra que el sistema es decimal y que se trabaja sobre el 10, lo mismo si se trata de unidades simples que de millones, lo que hace que las dificultades numéricas sean siempre las mismas en las distintas clases de unidades.

Es en la obtención del valor y en la «colocación en su puesto» de la cifra del cociente, en lo que consiste la dificultad fundamental de la división.

Nosotros consideramos, como base del estudio, el análisis y la distinción de las partes..

Las distintas partes separadas y analizadas dan claridad al procedimiento. Es siempre profundizando en el conocimiento como se avanza y no (como en los métodos corrientes) exponiendo dificultades sucesivas en línea recta y superándolas una a una (división de números pequeños y después mayores ; divisor de una y varias cifras, etc.)

Una vez dicho cómo se prepara el material relativo al dividendo veamos el que representa el divisor.

Antes que nada, precisa que resalte la diferencia entre los números del dividendo y los del divisor. El dividendo es la *cantidad* a dividir. El divisor, aun cuando sea un número que podrá llegar al grupo de millones, representa e indica el número de partes iguales en que se fracciona el dividendo. Nada hace resaltar tanto esta diferencia como representar el dividendo por una suma de dinero y el divisor por un número de personas que deben repartírselo entre ellas.

El concepto del primer juego escolar puede ser tomado nuevamente y ampliado por el material.

En efecto, en el divisor, en lugar de perlas usaremos bolos muy pequeños que recuerden un poco la figura del hombre y utilizaremos bolos blancos, grises o negros con la parte superior roja, azul o verde. Como «plan de ejecución» debe realizarse la *distribución* de unidades que constituyen el dividendo entre las unidades que constituyen el divisor y para ello usaremos una tabla semejante a la que usamos para los ejercicios de la multiplicación.

Aquí, sin embargo, la tabla es un «cuadrado de nueve» y presenta, por lo tanto, 81 espacios que pueden contener perlas en filas paralelas, porque más de nueve no pueden corresponder a ninguna unidad del divisor ; si se añadiese una más, ésta pertenecería con el 9 a otra categoría decimal (el 10).

Distinguiremos varias tablas para la división, según se trate de bolos rosa, azules o verdes. En la parte superior de la tabla hay una faja que tiene nueve círculos ahuecados, con fondo blanco, donde está escrita la cifra en serie del mismo color de la faja : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Los bolos se colocan en los círculos y cubren las cifras ; la distribución se lleva a cabo colocando, cada

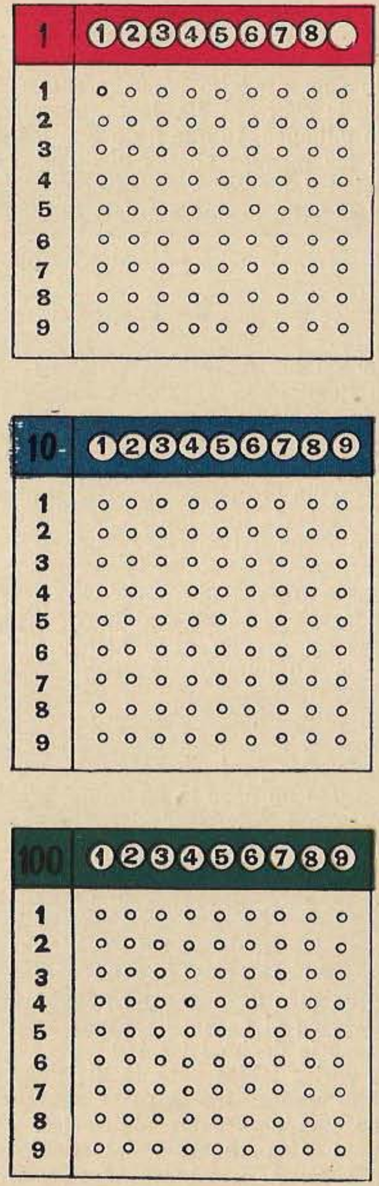


Tabla del divisor (Unidades)

Faja donde se colocan los bolos a partir del 1

Tabla del divisor (Decenas)

Lugar para los bolos azules de las decenas

Tabla del divisor (Centenas)

Lugar para los bolos verdes de las centenas

Fig. 89

vez, una perla debajo de cada bolo. Pero, la cifra que queda al descubierto, después del último bolo, indica indirectamente la cantidad de éstos (si la cifra descubierta es 8, esto indica que los bolos colocados son 7). En el lado vertical a la izquierda de la tabla de distribución están señaladas en negro, una debajo de otra, las cifras hasta 9 y éstas *cuentan* la cantidad de perlas correspondientes a cada bolo y, por lo mismo, el número de las filas de perlas que se han ido acumulando debajo de aquéllos. (Es sobre ellos donde se encontrarán las cifras del cociente).

Si el divisor se compone de más de una cifra (por ejemplo, unidades y decenas, o unidades, decenas y centenas) precisan otras tantas tablas que se colocarán horizontalmente, una junta a otra y ello, para que aparezca más claro el hecho, de que se va distribuyendo a todos los grupos representados, «a la misma cantidad».

Mientras se da *ciento* a un bolo verde, se da *diez* a un azul y se da *uno* al bolo rojo.

Pero, cada individuo representado recibe uno, porque se sobreentiende que, lo que correspondió al bolo verde *debe después ser dividido entre ciento* y lo que correspondió al bolo azul va dividido entre otros diez. Solamente el bolo rosa de las unidades simples recibe lo justo, que es, precisamente, lo que corresponderá a cada uno.

Es cierto que todos los cuadros deben tener la misma cantidad de filas de perlas y, si cada centena recibe tres, otros tantos debe recibir cada decena y cada unidad, y aquel tres que se encuentra en todas las tablas es la cifra del cociente. Pero aquel tres ¿qué representa? ¿Cada unidad del divisor tendrá tres millones, tres millares o tres unidades?

O dicho en otra forma ¿cuál es el lugar de aquel tres en la serie de valores? Evidentemente es el lugar relativo a lo que correspondió a las unidades simples, a los bolos rosas.

No consiste todo, pues, en hallar la cifra del cociente ; hay que conocer el *lugar* que ocupa. Es decir, ¿cuál es el valor correspondiente a la cifra de las unidades simples del divisor?

Si se dieron tres millones a la centena, se dieron trescientos mil a las decenas y treinta mil a las unidades ; la suma corespondiente a cada uno es 30.000.

Centenas :	3.000.000
Decenas :	300.000
Unidades :	30.000

Las centenas, dividiendo por ciento, hacen descender dos lugares, la cifra positiva tres.

Las decenas, dividiendo por diez, hacen descender un lugar su tres.

$$3.000.000 : 100 = 30.000$$
$$300.000 : 10 = 30.000$$

Esto es; dividir por ciento y por diez quiere decir: quitar dos y un cero, respectivamente. Esta división por 10, 100, 1000, etc., está siempre incluída en las divisiones donde el divisor tiene varias cifras.

El cociente es, pues, doblemente interesante como cifra y como valor. La división se considera como un hecho o como una escena análoga a aquella de los primeros juegos de los niños; supone una *multitud de unidades,* no presente, como eran aquellos niños representados por la decena que no aparecían, pero que después, del niño decena, recibían su parte en la sucesiva división por 10.

Aquí entre los símbolos, aquella multitud puede ser centena o millar o decenas de millar de personas ansiosas de saber, cada vez, cuánto ha correspondido a cada una; saber, no solamente la cifra, sino, sobre todo, el *lugar* de ella. Mientras por una parte tiene lugar la *distribución* por igual entre los cuadros, cuya distribución determina la cifra, la multitud lejana de las unidades participantes está ansiosa de conocer la cifra por el lugar que ésta ocupa; como en la Bolsa, los accionistas, aguardan ansiosos el aumento de su fortuna.

Por todo ello precisa dar especial relieve al cociente. Mientras en el juego primitivo de la efectiva subdivisión practicada en el dividendo, se hacía resaltar el hecho de que quedaba «aquella misma cantidad subdividida en partes» y que se podía en seguida acumular de nuevo, volviendo a su estado primitivo, en este juego de símbolos, un intento más útil se pone de relieve: el *cociente.*

Es la *unidad receptora* la que sobresale, mientras antes prevalecía la cantidad a dividir.

Por esto hemos establecido un material de colocación sucesiva de las cifras del cociente: la Bolsa del cociente, esto es, la cuota correspondiente a cada individuo. La cuota se manifiesta, cifra a cifra, y, allí se coloca.

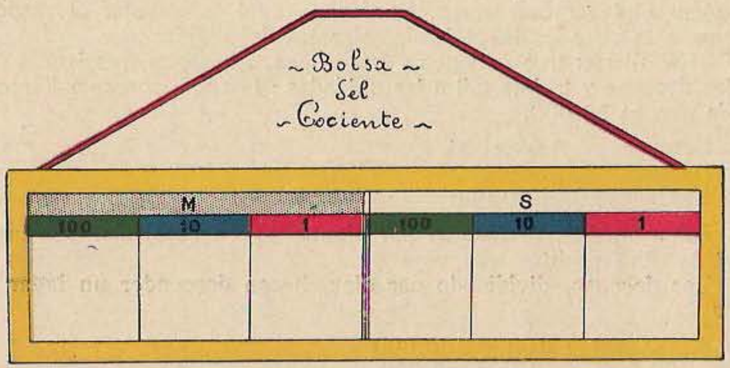


Fig. 90

En los cuadros se escriben sucesivamente las cifras del cociente. La sustancia es tal, que las cifras se pueden borrar después.

ANALISIS DE LAS UNIDADES

Hecha de este modo la descripción del material y de los fines que se persiguen con estos ejercicios, pasemos a la práctica de la operación.

La operación, para ser claramente comprendida, requiere un análisis completo de los números, esto es, el análisis hasta las unidades.

Mientras para la multiplicación (que es una acumulación), el análisis se contraía solamente a la distinción de los valores; por ejemplo, 6.843 analizado para la multiplicación era:

6.000
800
40
3

el mismo número analizado para la división, es:

1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
1.000	100	10	
1.000	100		
1.000	100		
	100		
	100		

Si dicho número se multiplicase por 5, el análisis habría reducido la multiplicación entre grupos a : 6 × 5 : 8 × 5; 4 × 5; 3 × 5 y, por lo tanto, a la colocación de los resultados parciales según su valor. En la división, en cambio, hay una distribución, unidad por unidad, y la escisión debe ser completa.

Dividiendo, pues, por cinco dicho número, la preparación analítica sería la siguiente:

1.000 — 1	100 — 1	10 — 1	1 — 1
1.000 — 1	100 — 1	10 — 1	1 — 1
1.000 — 1	100 — 1	10 — 1	1 — 1
1.000 — 1	100 — 1	10 — 1	1
1.000 — 1	100 — 1	1	1
1.000	100		
	100		
	100		

En este análisis está indicada la distribución unitaria; la división está representada por aquella relación entre *una* y *uno* que puede observarse en el cuadro precedente. En las dos primeras columnas hay restos, en las otras dos, en cambio, existe insuficiencia. La división entera consta de cuatro divisiones *parciales,* pero *dependientes* en el sentido que debe ser utilizada toda la cantidad disponible en la subdivisión entre aquellas cinco unidades, las cuales, se presentan indistintamente, ante cada grupo a reclamar su parte.

Pongamos ahora en otro orden la cantidad analizada, es decir, en el orden de los divisores y hagamos la subdivisión del dividendo grupo por grupo. Una de las características de la división es, que mientras el grupo de unidades que constituyen el divisor permanece fijo e inmutable desde el principio hasta el fin, los grupos del dividendo, esto es, las cantidades, sufren contínuas transformaciones pasando de puestos superiores a puestos inferiores y cambiando cada vez los dividendos de los grupos parciales.

Resulta, pues, que se trata, cada vez, de nuevas divisiones. Los dividendos nuevos que se forman no pueden preverse, no se podrían representar a priori. Son «sorpresas» semejantes a las que proporciona la marcha de un negocio financiero.

Cada división parcial es, pues, separable de la anterior y al propio tiempo, es consecuencia de ella. Cada división da lugar a una nueva cifra que es la cantidad que de cada grupo de valores corresponde a cada unidad del divisor. Dicha cifra es una cifra del cociente. Comencemos por el primer grupo o sea el de los millares.

I	I	I	I	I
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000				

Fig. 91

Evidentemente, cada una de las unidades rojas no puede tener más que un millar (fig. 91).

La primera cifra del cociente es 1 y este 1 representa un millar; 1000 está pues en el 4.° lugar. Ahora aquel millar de más es el resto de esta primera división.

La segunda división se refiere al segundo grupo: 800 : 5.

El dividendo, sin embargo, cambia en la segunda división porque tiene en su ventaja el resto de la primera. Aquel millar de resto será un cubo que es preciso descomponer en los diez cuadrados que lo integran y forman un total de diez y ocho centenas y no ocho, que deben distribuirse entre cinco (fig. 92).

En la distribución una a una, han correspondido tres centenas

I	I	I	I	I
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	0	0

Fig. 92

a cada uno; las tres centenas que no bastan para cubrir una fila son, pues, el resto de esta división.

El cociente lo da la cifra 3 y estas 3 son centenas: 300. Hasta ahora, pues, el dividendo distrubuído, ha dado a cada unidad: 1300.

Pasemos ahora a la tercera división: 40 : 5. La cantidad de decenas es insuficiente para la distribucción. Pero aquel dividendo es sólo aparente, porque las tres centenas de resto en la división anterior, se descomponen y se precipitan en la categoría de las decenas. Será, pues, el caso de tres cuadrados de ciento que deben descomponerse cada uno en los diez bastones de que están formados.

La tercera división es, pues, la distribución de 34 bastones entre cinco, esto es, treinta y cuatro decenas a los cinco individuos *rosa* que permanecen inmutables desde el principio hasta el fin.

I	I	I	I	I
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	0

Fig. 93

El dividendo de decenas, que aparecía insuficiente al principio, enriquecido con restos inesperados, ha podido dar una distribución completa de 6. La distribución incompleta del último grupo tiene el significado de un resto, aun cuando sólo falte una unidad. La tercera cifra del cociente es pues 6, y son 6 decenas, es decir: 60.

Los componentes individuales del divisor tienen hasta ahora cada uno 1360 unidades del dividendo.

La cuarta y última división se refiere al grupo 3 : 5. El dividendo aparece claramente insuficiente, pero, he aquí que se enriquece con un botín considerable e inesperado. Aquellos cuatro bastones de resto deben deshacerse y añadir sus diez perlas libres en el dividendo de las unidades. La división efectiva que se presenta es, pues, 43 : 5 (fig. 94).

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0

Fig. 94

Esta reserva a cada uno, el dividendo de 8 unidades, y sobran tres que se inutilizan definitivamente. La última cifra del cociente es 8 y son 8 unidades simples.

Por lo tanto, el cociente total que corresponde a cada una de las unidades del divisor es: 1.368.

La división fué pues 6.843 : 5 = 1.368 y tres de resto.

El número, que al principio constituía un conjunto se ha descompuesto en cinco partes iguales y desapareció en ellas dejando un resto insignificante.

1368 — 1
1368 — 1
6.843 ——— 1368 — 1
1368 — 1
1368 — 1
......
3

Fig. 95

OPERACIONES CON EL MATERIAL

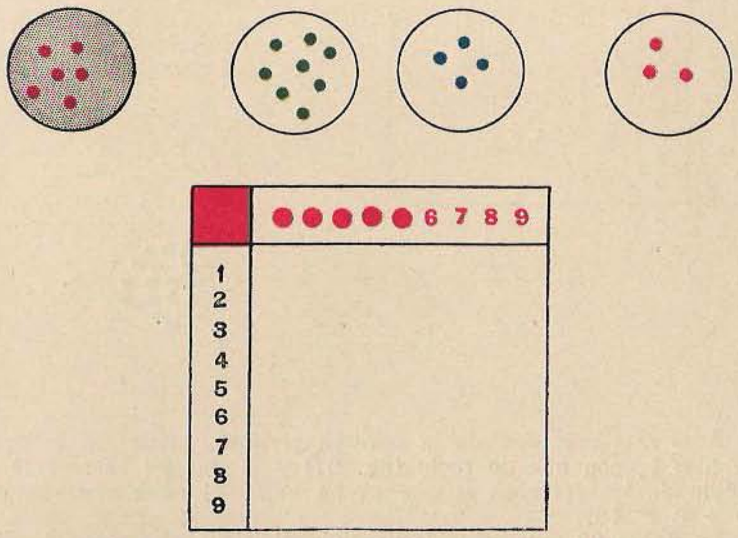
Si vamos ahora a la aplicación con el material simbólico de las perlas se tienen objetos iguales entre sí, sin otra diferencia, que la del color y la posición.

En vez de la representación analítica de las unidades de distinto valor 1.000, 100, etc. se tiene la misma perla, al igual que se tienen simples cifras en los números no analizados: 2648 donde existen un 2 primero, luego un 6 etc. cuya posición relativa es la que distingue sus valores.

Así las perlas son rojas, verdes o amarillas, o están depositadas en platillos blancos o grises. Representando unidades separadas, son como números analizados hasta las unidades y usados conjuntamente, es decir, un grupo junto al otro dan una idea de conjunto de la operación.

Sea la división, analizada precedentemente por medio de cifras, 6.843 : 5.

Se comienza la operación colocando en fila horizontal un platillo gris y tres blancos y depositando en ellos las perlas necesarias; 6 perlas rojas en el de los millares y sucesivamente en los demás 8 perlas verdes, 4 amarillas y 3 rojas (fig. 96).



6.843 5

Fig. 96

El divisor se prepara después con los cinco bolos colocados en el cuadro de distribución. El cuadro no cambiará jamás, en cambio, los platillos del dividendo cambiaran con mucha frecuencia su contenido que deberán volcar en la tabla para distribuirlo por igual entre los cinco bolos.

Cuando se ha concluído una división parcial y la cifra está señalada en el cociente, la tabla se vacía y las perlas que se utilizaron en la distribución se alejan del lugar donde la operación se realiza. Cuando se ha terminado la división relativa a la cantidad contenida en un platillo, éste se desplaza igualmente del lugar donde la operación se ejecuta, mientras sobre el cuadro se coloca el platillo sucesivo. Así se prosigue hasta que han desaparecido todas, a excepción de las que contienen los residuos no utilizables del dividendo : el resto.

6 — 5

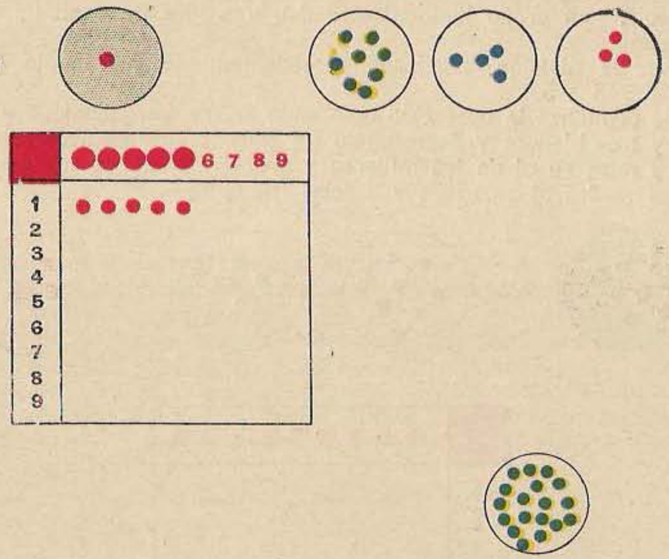


Fig. 97

Aquí está representada la primera división, la de los millares 6 : 5 = 1, con una de resto (fig. 97) y la fig. 98 representa el platillo de las centenas al que se ha unido el resto precedente : 10 + 8 = 18.

La figura 98 representa la segunda división referente a la distribución de las centenas, esto es, 18 : 5. El cociente es 3 y el resto 3.

La figura 99 representa el contenido del platillo sucesivo de las decenas, en el cual se ha acumulado en forma de decenas el resto precedente.

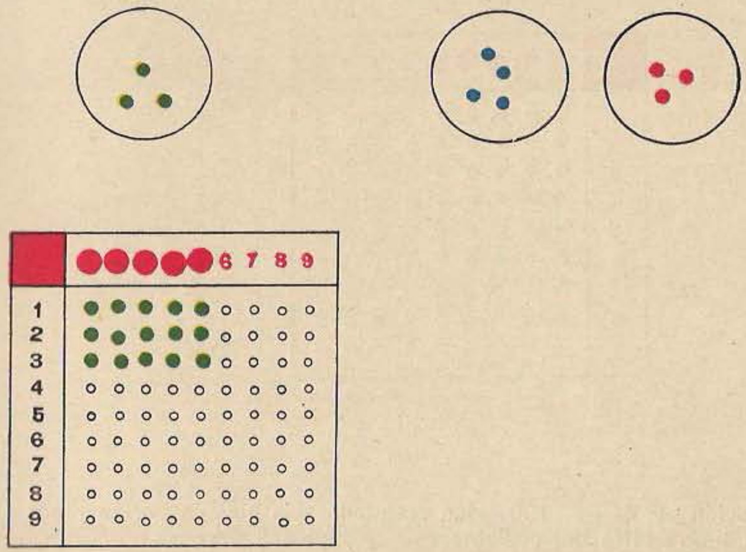


Fig. 98

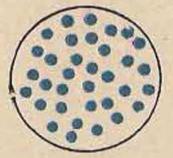


Fig. 99

Por lo tanto, los términos de la nueva división serán : 34 : 5, donde el dividendo está constuído por decenas.

La tercera división, esto es, la distribución de las 34 decenas entre las cinco unidades del divisor está representada en su eje-

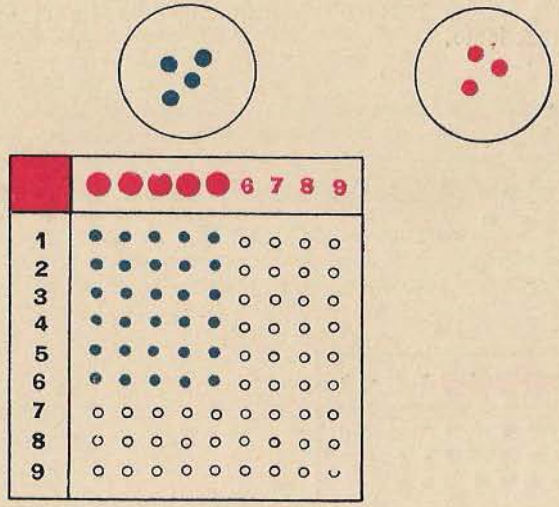


Fig. 100

cución por la fig. 100. Han resultado seis filas de perlas y por ello la nueva cifra del cociente es 6 e indica 6 decenas.

Existe un resto de 4 decenas que deberán ahora pasar como unidades simples al último platillo (fig. 101) constituyendo el último dividendo o sea 43.

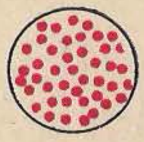


Fig. 101

Finalmente, en la cuarta y última división, la distribución de las unidades ha tenido lugar como indica la figura 102 y como ha cubierto ocho filas, la última cifra del cociente es 8.

El resto de tres unidades es el resíduo inutilizable de la cantidad total que fué dividida entre las cinco unidades del divisor.

43 — 5

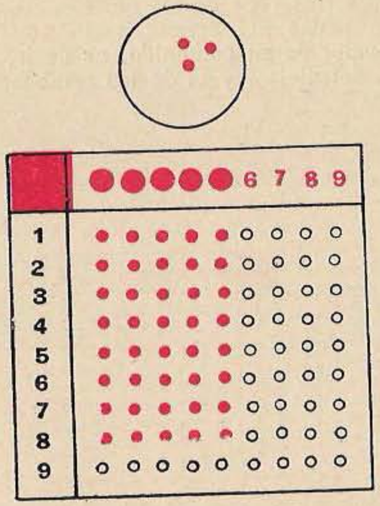


Fig. 102

Las cifras encontradas sucesivamente para el cociente fueron

1.ª división :	6000	:	5	=	1000	Del Dividendo
2.ª id.	1800	:	5	=	300	
3.ª id.	340	:	5	=	60	6.843
4.ª id.	43	:	5	=	8	

Cociente : 1368

Resto : 3

6000	resto	1000
1800	»	300
340	»	40
43	»	3

en las sucesivas divisiones por 5

Se procede análogamente en una división donde el divisor tenga dos o tres cifras.

Entonces, en vez de utilizar una sola tabla de distribución se utilizan dos, una para las decenas y otra para las unidades, donde los bolos azules recuerdan los decuriones ; y si son tres ,en la tercera se ven los bolos amarillos (centuriones). El ejercicio puede ser individual, aun cuando con frecuencia, intervienen más niños, bien como cooperadores o sólo como observadores.

Sea por ejemplo la división 3867 : 46.

La (fig. 103) indica la preparación inicial del dividendo y del divisor y la posición recíproca de los objetos.

Sobre las dos tablas del divisor están colocados los platillos más altos por el valor de su contenido, es decir, el de los millares sobre las decenas del divisor y el de las centenas sobre la tabla de las unidades.

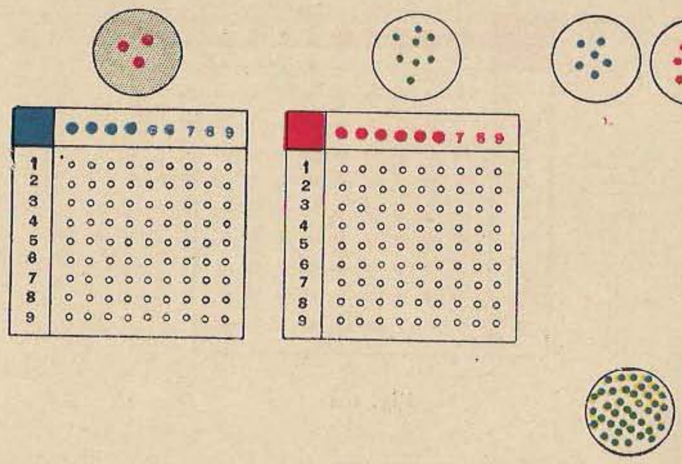


Fig. 103

Como se ve en seguida que no es posible la distribución por igual de los millares, éstos se llevan a las centenas acumulándose a las ya existentes como se indica en la figura anterior.

Este platillo cargado ahora con 38 centenas va colocado sobre la primera tabla y hacia la segunda se avanza el platillo que contiene seis decenas.

Después se coloca una perla amarilla debajo de cada uno de los bolos azules y una perla azul debajo de cada uno de los bolos rosa, llenando sucesivamente todas las filas. Si faltan perlas azules se toma una amarilla del platillo precedente lo que enriquece al que le sigue en diez perlas y así sucesivamente.

De este modo se llegan a completar ocho filas en las dos tablas, quedando como residuos utilizable uno en el platillo de las centenas y ocho en el de las decenas.

La operación 386 : 46 ha dado 8 como cociente y 18 como resto.

¿Qué es el 8 del cociente?

Son 8 decenas, tal es el valor relativo a las unidades del divisor.

Concluída de este modo la primera división se apartan todas las

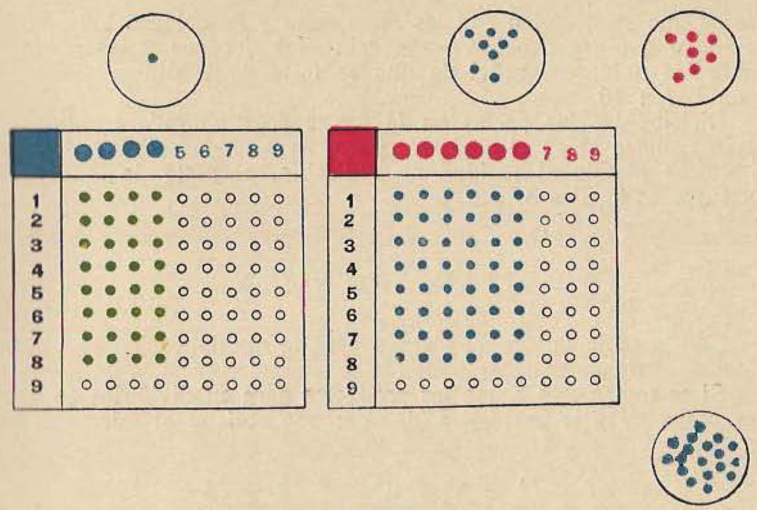


Fig. 104

perlas que están en las tablas puesto que representan la parte del dividendo ya dividido entre las unidades del divisor y se prepara el nuevo dividendo.

Del platillo de las centenas se vuelca la única perla en el platillo de las decenas, en forma de diez decenas, o sea, de diez perlas

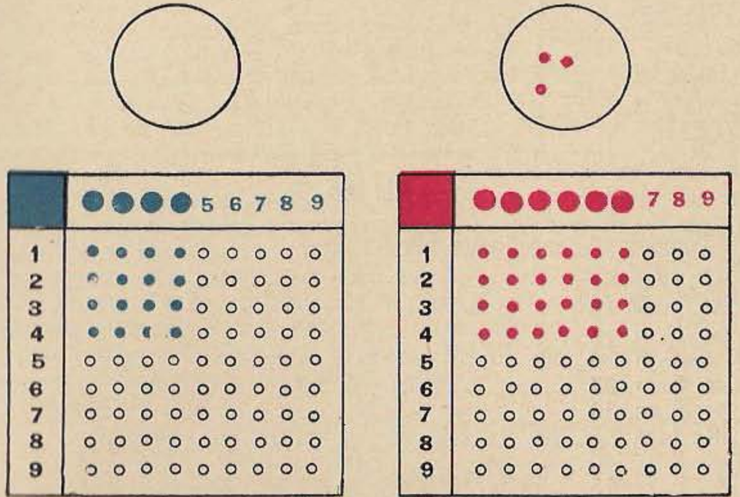


Fig. 105

azules que se mezclan con las otras ocho y se colocan los platillos de modo que las decenas estén sobre las decenas y las unidades sobre las unidades, señal de que se trata de la última división o sea : 187 : 46.

Distribuídas las perlas en la forma acostumbrada resultan cubiertas cuatro filas ; el cociente, pues, es 4 unidades y queda sobre el último platillo el residuo no utilizable, el resto de la división total que es igual a 3.

PRUEBA Y SEMEJANZAS

Con la tabla de decenas usada para la multiplicación se pueden efectuar divisiones ; éstas tienen la misma apariencia.

Si se toman uno a uno los productos para subdividirlos se opera inversamente a la multiplicación, pero se obtiene el mismo orden

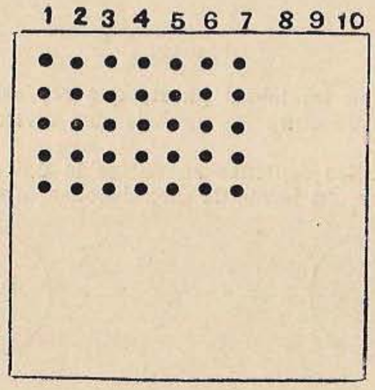


Fig. 106

Tomemos los productos por 5

5 × 1 = 5
5 × 2 = 10
5 × 3 = 15
5 × 4 = 20
5 × 5 = 25
5 × 6 = 30
5 × 7 = 35
5 × 8 = 40
5 × 9 = 45
5 × 10 = 50

Tomemos ahora uno cualquiera de los productos, por ejemplo el 35 y dividámoslo por 5, es decir, hagamos las filas posibles de 5 perlas.

Han resultado siete filas, luego : 35 : 5 = 7.

En vez de 5 × 7 = 35

En los dos casos tendremos una disposición idéntica de las perlas, solamente que en el caso de la multiplicación el número 35 es el punto de llegada y en la división es el de partida.

Todas las combinaciones de la multiplicación pueden así repetirse : en el caso de 48 : 8.

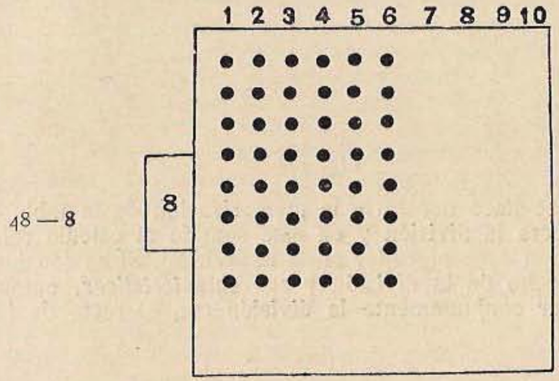


Fig. 107

El número de las filas, encontrado es 6. Luego 48 : 8 = 6.

Ello corresponde a la multiplicación 6 × 8 = 48.

La misma disposición de las perlas es la prueba visible de la invertibilidad de los factores de la multiplicación 6 × 8 = 8 × 6. El producto en los dos casos es la cantidad inmóvil y ordenada de perlas que hay sobre el tablero : 48.

Esta relación entre la multiplicación y la división es causa de que la multiplicación (inversa de la división) sea una prueba de ésta.

En efecto, la división no altera la cantidad a repartir, sino que la dispone en partes iguales. Mientras la multiplicación es una acumulación sucesiva de cantidades iguales, lo que trae consigo un crecimiento gradual de la cantidad, en la división la cantidad permanece inmutable, solamente se la *ordena* en forma diversa.

Este hecho conduce a que se pueda utilizar la tabla de multiplicar en la ejecución práctica de la división.

Por ejemplo, sea 56 : 7.

Quien retenga en la memoria todas las combinaciones del 7 puede recordar que 7 × 8 es igual a 56.

Entonces la división puede realizarse de memoria y se sabe de este modo (por el cálculo mental) que 56 : 7 = 8, porque 7 × 8 =

56. Lo cual se expresa diciendo que el 7 cabe exactamente 8 veces en el 56 (fig. 108).

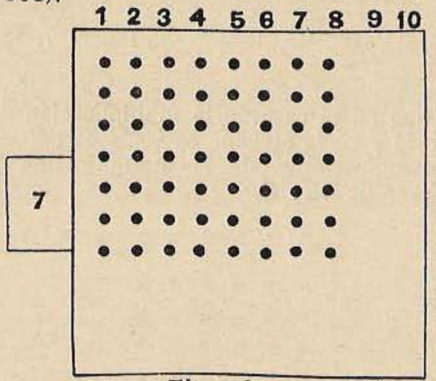


Fig. 108

Por esto se hace necesaria la memorización de la tabla pitagórica incluso para la división y en este sentido el cálculo relativo a la multiplicación debe preceder al de la división. Si se considera, en cambio, el hecho de la división y sus *características,* entonces se puede estudiar conjuntamente la división con el resto de las operaciones.

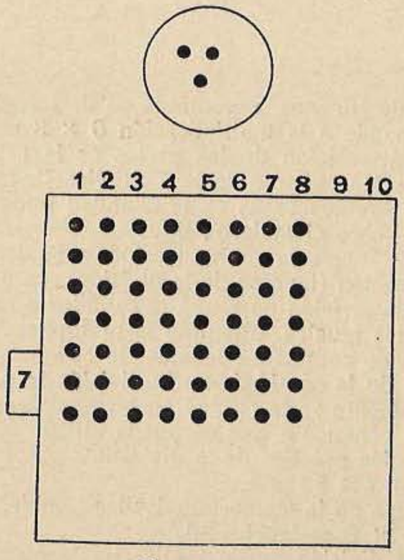


Fig. 109

Escojamos ahora un número cualquiera, por ejemplo 59, que se quiera dividir por 7 (fig. 109). La división sobre el tablero da como resultado 8 y la cantidad distribuída en partes iguales corresponde a la multiplicación 7 × 8 que como sabemos es 56. El residuo 3 que queda sobre el platillo es el resto inutilizable de la división cuya *característica* consiste en dividir una cantidad determinada en partes iguales. Por lo tanto, el número dado comprende el grupo de la multiplicación 7 × 8 más el resto 3.

59 = (7 × 8) + 3.

Habiendo efectuado la operación 59 : 7 para volver a acumular la cantidad primitiva es preciso realizar la multiplicación 7 × 8 = 56 y añadir después a este producto el resto 56 + 3 = 59.

Si se quiere, pues, hacer de memoria la división 59 : 7 precisa averiguar ante todo cuál es la mayor combinación del 7 que entra en 59. Buscando en la memoria se encuentra que es la combinación con el 8 porque 7 × 8 = 56 (7 × 9 = 63 el producto resultaría mayor). El 8, pues, es la cifra del cociente. Entonces precisa efectuar de memoria una *sustracción,* es decir, sustraer del número dado la combinación hallada : 59 — 56 = 3. De ese modo hemos encontrado el resto. La división lleva, pues, consigo una labor contínua de multiplicación y sustracción.

Esta es la característica del cálculo de la división y no del *hecho* de la división.

Aquella labor se limita a la combinación de la multiplicación y de las sustracciones, utilizando la memorización de la tabla pitagórica, y se aplica siempre, sea cual fuere el valor, esto es, la posición de los números.

Tenemos, pues, que las *características* del hecho de la división y el ejercicio ágil en el reconocimiento de los *valores* según el lugar que los números ocupen «son extraños a aquella labor mental» y preparados convenientemente, convierten en claro y sencillo el cálculo de la división más compleja.

EL CÁLCULO PARA LA DIVISIÓN

Apliquemos ahora a la división el cálculo utilizando las memorizaciones.

Supongamos la división ya efectuada según el análisis unitario de los números y según el material distributivo :

6.843 : 5.

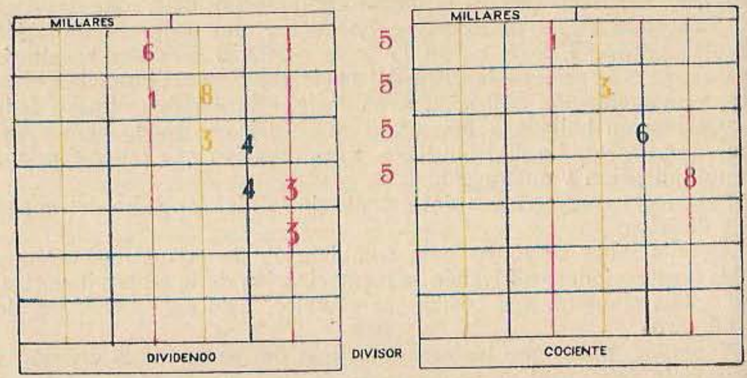
que daba como cociente 1368 y tres de resto. En vez de efectuar el análisis propio de la división, hacemos el análisis del número separando solamente los grupos, como en la multiplicación.

Usaremos hojas análogas a las ya descritas—donde las líneas verticales de varios colores (rosa, azul, amarillo) indican el *lugar* de las unidades, decenas y centenas—en forma que puedan escribirse las cifras sin acompañarlas de los ceros.

El dividendo, divisor y cociente tienen sus espacios respectivos. Siendo el análisis de los grupos

6000
800
40
3

se escribirá solamente las cifras 6, 8, 4, 3 en los lugares respectivos según su valor. El divisor 5 se repite delante de cada grupo que deba dividirse (fig. 110).



6 8 4 3 : 5 = 1 3 6 8

Fig. 110

6 : 5 da uno con 1 de resto.

El 1 de resto de los millares se baja para colocarlo junto al 8 de las centenas haciendo un total de 18.

Ahora la mayor combinación de 5 que puede entrar en tal número es 5 × 3, luego el 3 es el cociente. Si sustraemos 15 a 18 quedan tres de resto, el cual desciende junto a las cuatro decenas formando un total de 34. La división es ahora de 34 entre 5. La combinación 5 × 6 = 30 es la máxima que puede entrar en el 34 dejando un resto de cuatro decenas, mientras el cociente que corresponde a las centenas es 6.

Las unidades, convertidas en 43, se dividen por 5, siendo 5 × 8 = 40 la combinación buscada y 8 el cociente último, quedando tres de último resto. En la figura 110 aparece representada la operación en la forma más sencilla.

EJERCICIOS CON LOS NUMEROS

EJERCICIOS CON LOS NUMEROS

DIVISIBILIDAD

NÚMEROS PRIMOS

I

Volviendo a aquellas fáciles demostraciones que llevamos a cabo para poner de relieve la similitud entre la multiplicación y la división, conviene obtener un número más vasto de combinaciones y no solamente el mínimo necesario para el cálculo, como sucede en la tabla pitagórica. Para ello, en vez de recurrir a las tablas parciales que contienen las combinaciones de cada número con la serie del 1 al 10, que fueron construídas para memorizar la tabla de Pitágoras, seguiremos buscando los productos de las combinaciones que exceden de aquel límite.

Evidentemente, la cantidad mayor de la combinación resultará hacia los números más pequeños (2) mientras para el 10 la cantidad de las combinaciones permanece la misma. Estas combinaciones más numerosas se llevan a dos tablas A y B. En efecto, para hacer más fácil su lectura se han dividido las combinaciones en dos tablas; en la primera se llega al producto de 50 y en la segunda se continua hasta el 100. En A y B están, pues, contenidas todas las combinaciones «dentro del 100». En otra tabla (C) donde están inscritos los números en la serie natural de 1 a 50 y de 51 a 100 se ha ejecutado la labor de buscar, en relación con cada uno de estos números, todas las combinaciones que se pueden hallar leyendo los productos en las tablas A. y B.

Resulta entonces que algunos números (como por ejemplo 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 etc.) no resultan jamás producto de combinaciones. Estos son «números primos».

En cambio, respecto a los otros números, existen combinaciones en cantidad variable, pero siempre limitada.

Por ejemplo, respecto al 48 se leen las combinaciones siguientes: $48 = 2 \times 24$
» $= 3 \times 16$
» $= 4 \times 12$
» $= 6 \times 8$
» $= 8 \times 6$

Y estas combinaciones se hallan en las tablas A y B leyendo los productos relativos a los números 2, 3, 4, 6, 8.

He aquí, pues, un número rico en combinaciones que se presta a los ejercicios con el material o con dibujos. Se pueden reproducir, disponiendo las perlas (o haciendo dibujos de puntos de color sobre una hoja de papel cuadriculado) las combinaciones indicadas, esto es, repitiendo :

El dos 24 veces.
El tres 16 veces.
El cuatro 12 veces.
El seis 7 veces.
El ocho 6 veces.

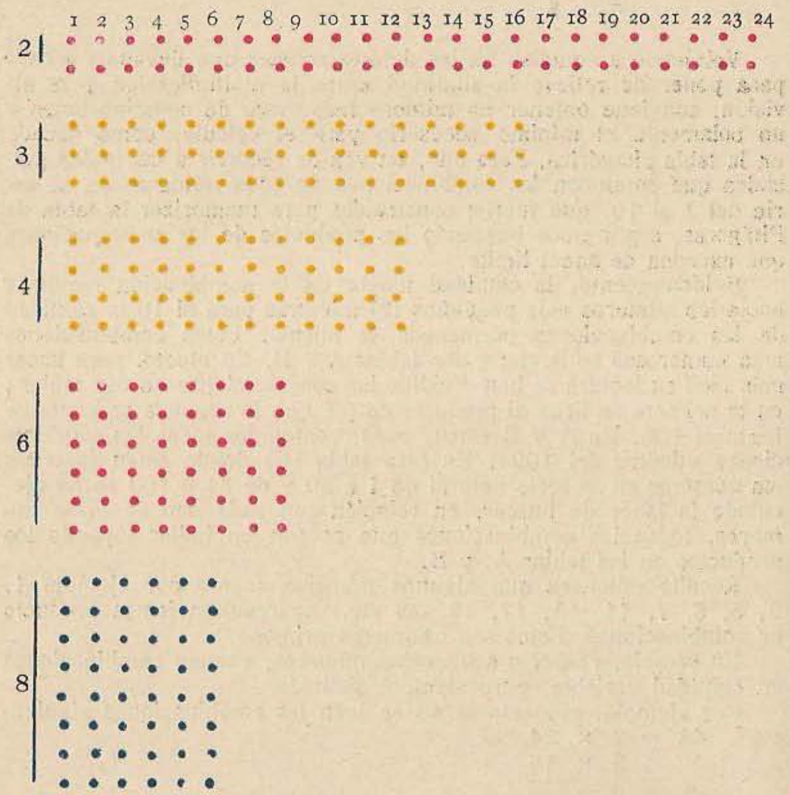


Fig. 111

La misma disposición de puntos se puede leer por una parte como multiplicación y por otra como división.

2 × 24 = 48	....	48 : 24 = 2		
3 × 16 = 48	....	48 : 16 = 3		
4 × 12 = 48	....	48 : 12 = 4		
6 × 8 = 48	....	48 : 8 = 6		
8 × 6 = 48	....	48 : 6 = 8		

El 48 es el punto de llegada en las multiplicaciones, en cambio, en las divisiones, es el punto de partida.

Y mientras el resultado es siempre el mismo en las multiplicaciones, en cambio, en la división, es distinto el cociente según la misma cantidad se divida en más o menos partes.

Por ello es muy interesante para diferenciar, en la división, el hecho que se trate, en cambio, de 48 dividido entre 24, que proporcionaría dos solamente para cada unidad del divisor.

Ahora puede ser interesante el estudiar en cuantas partes iguales se puede dividir un número. Esto se halla indicado por las «posibles combinaciones», esto es, por las multiplicaciones que se pueden incluir en cada número, y las multiplicaciones «inversas» representan en la división reales diferencias.

Incluyendo también las inversas se tienen las siguientes combinaciones y divisiones :

2 × 24 = 48	48 : 24 = 2
24 × 2 = 48	48 : 2 = 24
4 × 12 = 48	48 : 12 = 4
12 × 4 = 48	48 : 4 = 12
6 × 8 = 48	48 : 8 = 6
8 × 6 = 48	48 : 6 = 8
3 × 16 = 48	48 : 16 = 3
16 × 3 = 48	48 : 3 = 16

Ahora, en las tablas A y B se pueden buscar los grupos de las combinaciones correspondientes a la divisibilidad de los números que han resultado de la divisibilidad del 48.

Puede pues ser representado como sigue, en los grupos en que es divisible.

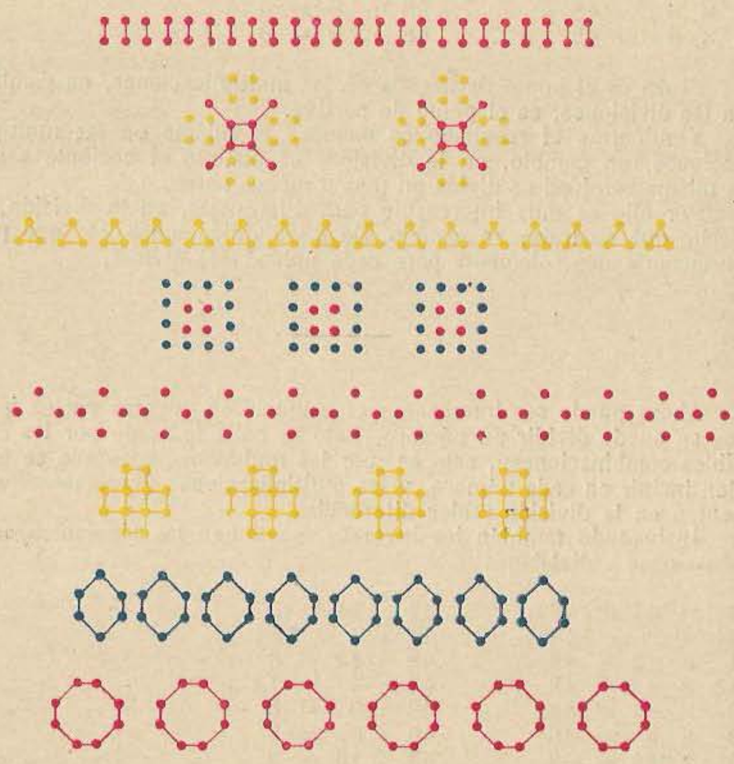
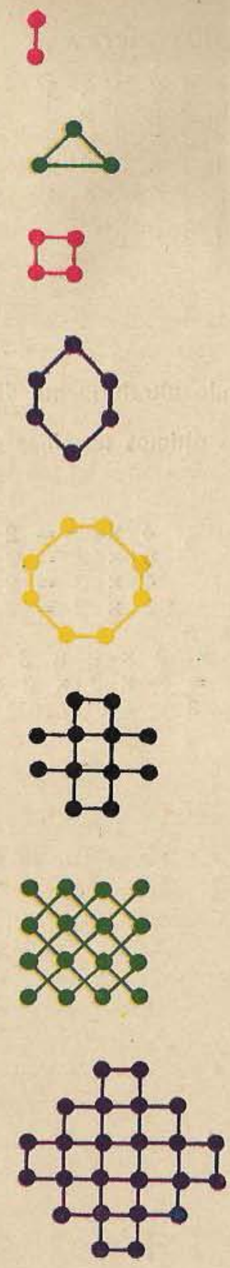


Fig. 112

Se expresa diciendo que el número 48 es divisible por 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, y resultan



24 grupo de dos.

16 grupo de tres.

12 grupo de cuatro.

6 grupo de seis.

8 grupo de ocho.

4 grupo de doce.

3 grupo de dieciséis.

2 grupo de veinticuatro.

Fig. 113

24 =	2 × 12;	12 × 2	2 × 2 × 2 × 3
	3 × 8;	8 × 3	3 × 2 × 2 × 2
	4 × 6;	6 × 4	2 × 2 × 2 × 3
16 =	2 × 8;	8 × 2	2 × 2 × 2 × 2
	4 × 4		2 × 2 × 2 × 2
12 =	2 × 6;	6 × 2	2 × 2 × 3
	3 × 4;	4 × 3	3 × 2 × 2
8 =	2 × 4;	4 × 2	2 × 2 × 2
6 =	2 × 3;	3 × 2	
4 =	2 × 2		2 × 2
3 =			
2 =			

Los números dos y tres no siendo ulteriormente divisibles son factores primos del número 48.

Ahora precisa buscar también los últimos términos de los otros números en que el 48 es divisible.

6 = 2 × 3	= 3 × 2		
8 = 2 × 4	= 2 × 2 × 2		4 × 2 = 2 × 2 × 2
12 = 2 × 6	= 2 × 2 × 3		6 × 2 = 2 × 3 × 2
12 = 3 × 4	= 3 × 2 × 2		4 × 2 = 2 × 2 × 2
16 = 2 × 8	= 2 × 2 × 4		2 × 2 = 2 × 2
16 = 4 × 4	= 2 × 2 × 2 × 2		
24 = 2 × 12	= 2 × 2 × 6	= 2 × 2 × 3 × 2	
24 = 3 × 8	= 3 × 2 × 4	= 3 × 2 × 2 × 2	
24 = 4 × 6	= 2 × 2 × 2 × 3		

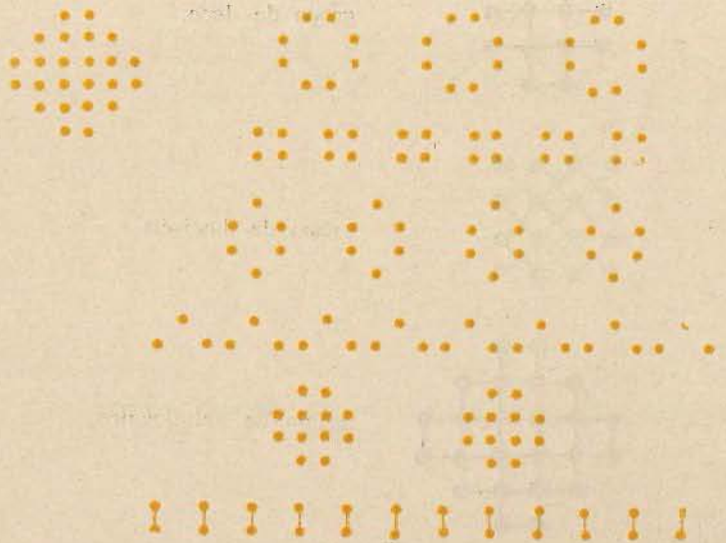


Fig. 114 (1

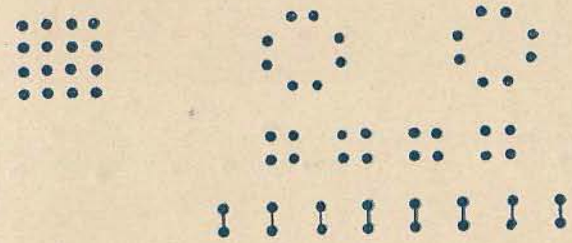


Fig. 114 (2

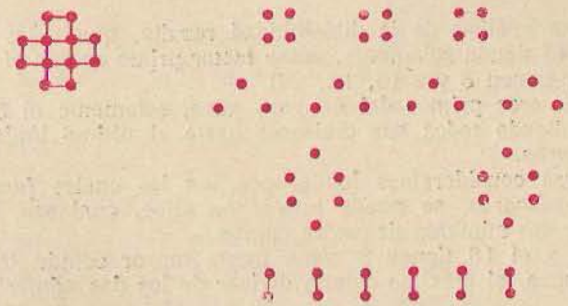


Fig. 114 (3

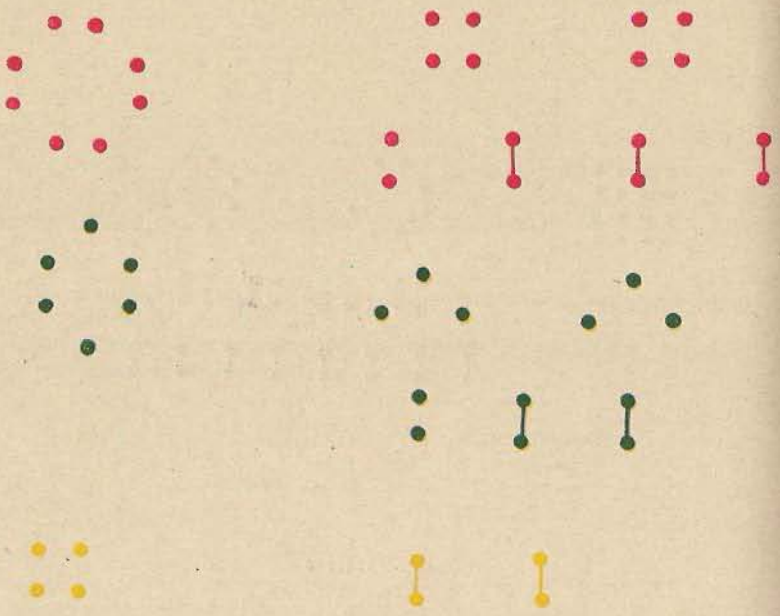


Fig. 115

De este análisis de la divisibilidad resulta, que todos los divisores del 48 tienen solamente, como factor primo común el 2, mientras otros, tienen 3 y 2 (6, 12, 24).

Los factores primos del 48 son, pues, solamente el 3 y el 2, porque hallando todos sus divisores hasta el último límite, no se obtienen otros.

Si ahora consideramos los grupos, en los cuales fueron divididos los números, se puede buscar en ellos, cual sea, el grupo mayor que dos números tienen en común.

El 24 y el 16 tienen 8 como figura mayor común (fig. 116). Este es, pues, el máximo común divisor de los dos números.

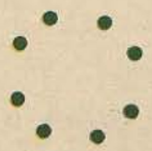


Fig. 116

El 12 y el 16 tienen como figura máxima en común el 4 (figura 117).

Fig. 117

Entre el 48 y su divisor mayor 24, la figura más grande que tienen en común es el 12 (fig. 118).

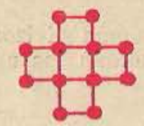


Fig. 118

Se puede representar el hecho con los dos números, por ejemplo 48 — 24 (fig. 119).

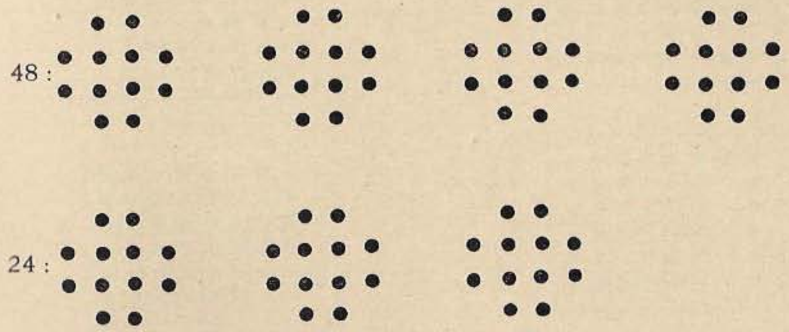


Fig. 119

También se puede representar el máximo común divisor de 24 y 16 (fig. 120).

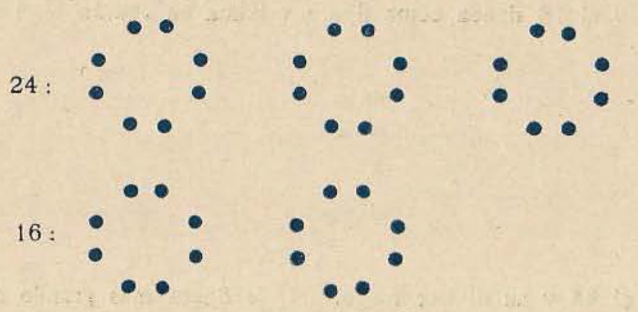


Fig. 120

Para hallar el máximo común divisor se debe escojer la mayor figura que representan en común los números analizados según la divisibilidad.

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$16 = 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$48 = 2 \times 24 = 2 \times 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

FACTORES PRIMOS Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Ahora representando el n.° 48 por un rectángulo formado por 6×8 puntos (fig. *a*) lo dividiremos en dos partes, lo que puede hacerse con perlas, por medio del dibujo o recortando el rectángulo anterior (fig. *b*.) (fig. 121).

Entonces cada rectángulo de *b* (24) se puede dividir en 2 (12) resultando cuatro rectángulos como en la figura *c*.

También éstos se pueden dividir en dos, resultando ocho rectángulos (fig. *d*) de seis puntos que se encuentran en *d*.

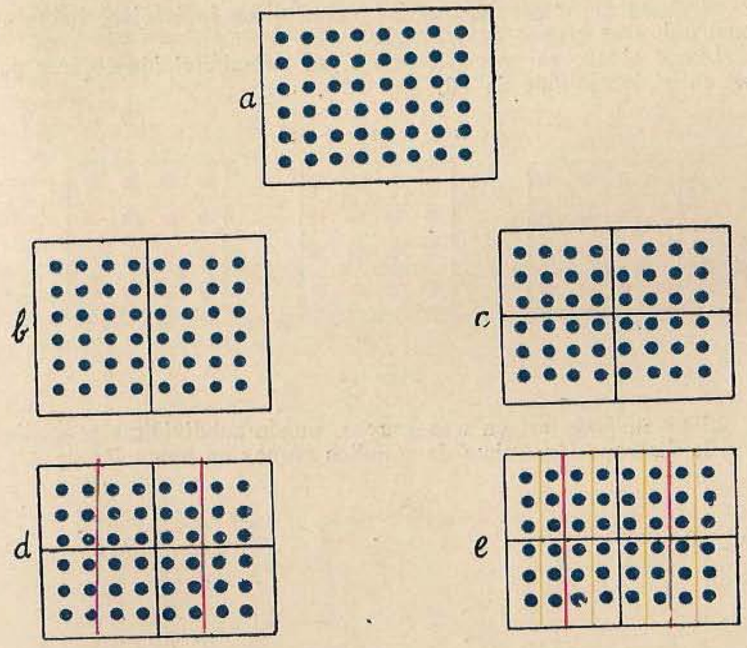


Fig. 121

Estos rectángulos pueden aún dividirse en dos partes como representa la figura *e*.

Aquí hemos llegado a grupos lineales de tres puntos últimamente indivisibles y, por lo tanto, la operación llegó a su término.

Así, realizada materialmente, ésta representa una operación, que divide siempre en dos, el número de origen hasta el límite posible.

Se obtiene de este modo un tres que parece ser el elemento final, impar e indivisible y, al propio tiempo, central y constructivo, aún cuando el número 48 se presente como número par por excelencia y múltiple de 2.

Con los grupos de 3 se puede reconstruir el 48 agrupándolos en 2×2; reagrupando de nuevo los obtenidos en 2×2 y así sucesivamente hasta 4 veces, haciendo la operación inversa de la precedente. Entonces experimentalmente se ve la construcción del 48 realizada así; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$.

Los factores primos, esto es, los números más pequeños e indivisibles que entran en la construcción del 48 son siempre 2 y 3.

La construcción del 48 a través de sus factores primos se puede representar numéricamente bajo la forma de potencia: $2^4 \times 3$.

El 2^4 es igual a 16.

Si ahora agrupamos las perlas según dicha indicación, habremos construído tres grupos de 16 perlas.

Luego el 48, par por excelencia, se ha subdividido en tres partes, es triplo múltiple de 16.

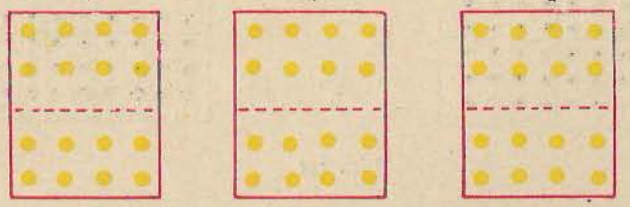
$2^4 + 2^4 + 2^4$

— 48 —

Fig. 122

El 48 dividido así en tres grupos, puede subdividirse procediendo a la disgregación íntima de aquellos grupos en potencias de 2.

2^3 2^3 2^3

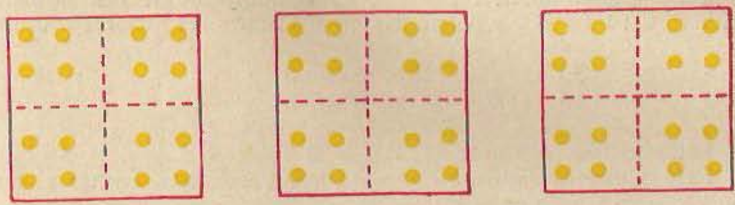


2^3 2^3 2^3

$= 2^3 \times 6 = 2^3 \times 2 \times 3$

Fig 123 (1

2^2 2^2 2^2 2^2 2^2 2^2



2^2 2^2 2^2 2^2 2^2 2^2

$= 2^2 \times 12 = 2^2 \times 2 \times 2 \times 3$

Fig. 123 (2

Los grupos 2^4, 2^3, 2^2, 2, 3 son todos divisores del número 48.

Las operaciones que acabamos de realizar con el material se traducen en cifras del modo siguiente:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

La línea vertical es la guía de las subdivisiones que comienzan con la escisión en dos partes, y prosiguen mientras la continuación es posible.

Busquemos ahora operando cifras, los factores primos de otros números como 60 y 40.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

Agrupemos ahora los tres números así descompuestos.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Observemos ahora los divisores comunes de dichos números, primero del 60 y 40, y pongamos en dos líneas los factores comunes.

$$60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 5 \times 2$$

Estos tienen comunes $2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$

Este número común 20 se repite tres veces para formar el 60 y dos veces para formar el 40.

En efecto 20 es el máximo común divisor de 60 y 40.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$$

El grupo común es $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$. Este para formar el 48 se repite 2×2 o sea cuatro veces y para formar el 60, cinco veces.

Veamos ahora cual es el divisor máximo que tienen común el 48 y el 40.

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 8 \times (2 \times 3) = 8 \times 6 = 48$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$$

Finalmente, los tres números tienen común.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Tienen, pues, común 2×2 o sea 4.

$$60 : 4 = 15 = 3 \times 5$$
$$48 : 4 = 12 = 3 \times 4$$
$$40 : 4 = 10 = 2 \times 5.$$

MULTIPLOS

La multiplicación tiene como característica la reunión de cantidades iguales, esto es, la suma de números iguales. Por ejemplo: 5×7 quiere decir $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ es decir, que el 5 está repetido 7 veces.

$$5 +$$
$$5 = 10$$
$$10 + 5 = 15$$
$$15 + 5 = 20$$
$$20 + 5 = 25$$
$$25 + 5 = 30$$
$$30 + 5 = 35$$

Ahora bien; todos estos números sucesivos, que no son sino agrupaciones del 5, se llaman múltiplos de 5.

Lo mismo sucede con todos los números.

Es decir: 20, 30, 40, 50, 60 etc., son múltiplos de 10.

Y también: 40, 60, 80, 100, son múltiplos de 20.

En los números anteriores, 80 es múltiplo de 40, y el 60 múltiplo de 30.

Todos los números que se hallan en la tabla pitagórica sobre la

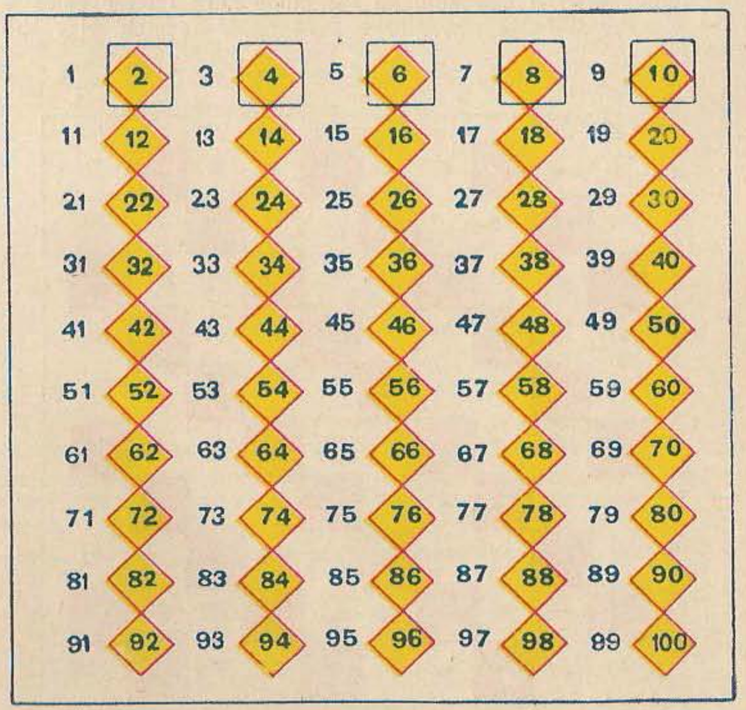


Fig. 124

misma línea, por ejemplo 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, son los múltiplos del número que encabeza aquélla; el 4 en este caso.

Para efectuar ejercicios basados en este «hecho» referente a los números tenemos tablas cuadradas de números que son simplemente la serie natural de ellos de 1 a 100 pero escritos sucesivamente en filas de 10 y que, por lo mismo, señalan el paso de una a otra decena.

En estas tablas pueden buscarse los multiplos de cualquier número hasta el límite de 100. Por ejemplo, en la fig. 124 están señalados los múltiplos de 2 que caen igualmente según la dirección vertical, mientras que en la fig. 125 se ven los múltiplos de 3 dispuestos según direcciones paralelamente oblicuas.

Los múltiplos de 6 (2 × 3) ocupan en la figura 126 lugares que participan del 2 y del 3, esto es, verticales y oblícuos pero sin continuidad como en las otras. Con un punto de intérvalo en las oblicuas y dos en las perpendiculares.

Una gran cantidad de tablas sin indicación de múltiplos quedan como material que utilizan los niños para buscar éstos y en ellas ejecutan dibujos que sirven para hacer resaltar el resultado obtenido.

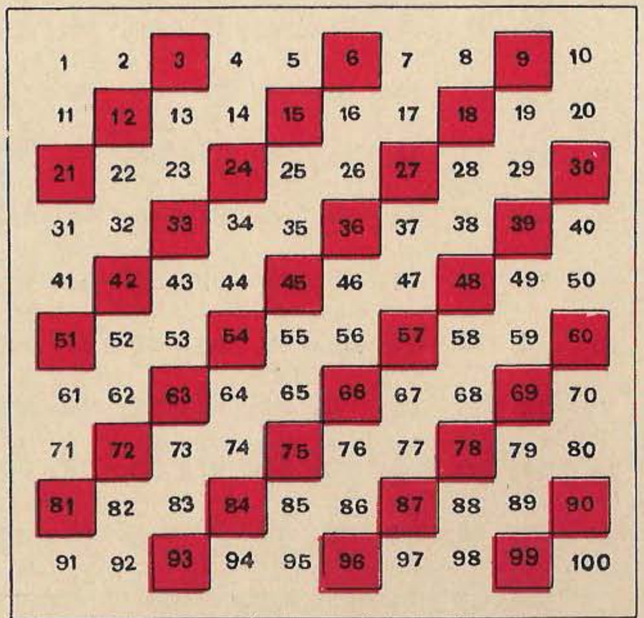


Fig 125

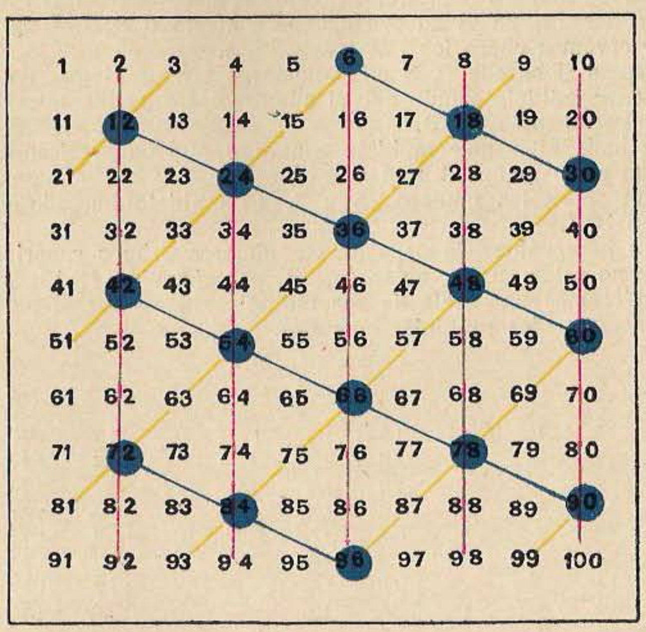


Fig. 126

MINIMO COMUN MULTIPLO

Otra indagación puede llevarse a cabo en la tabla de combinaciones hasta el 100, tabla A. y B. Esta consiste en buscar entre los productos relativos a dos números, por ejemplo 6 y 8, para ver si se logra encontrar en las dos series un número igual a que se llega, tanto en una como en otra serie es, 24; 6 × 4 = 24 y 8 × 3 = 24.

El 24 es, pues, un múltiplo común al 6 y al 8, y no hay otro menor que él, ya que es el primero que se encontró en ambas series

Busquemos ahora el primer múltiplo común que se encuentra entre el 3 y 7.

Este es 21 y se encuentra en una serie como 3 × 7 y en la otra como 7 × 3.

Es decir, que en este caso el múltiplo común se halla multiplicando un número por otro. En cambio, para el 6 y el 8 el múltiplo menor 24, no es su producto. En efecto $6 \times 8 = 48$.

Observemos ahora los números primos.

Veamos si sucede con otros números primos el que no exista otro menor múltiplo común que el número correspondiente a su producto. Por ejemplo 2 y 3.

Se halla el primer múltiplo común 6 que es precisamente el producto entre ambos $3 \times 2 = 2 \times 3$.

Sean ahora los números 5 y 7. El múltiplo buscado es 35. $35 = 5 \times 7$.

Para hacer ahora la prueba con números primos superiores al 10 que no están en las tablas A y B, por ejemplo 11, 13, 17, corresponderemos una tabla de sus múltiplos hasta más allá de 100 para encontrar los múltiples comunes.

11	11	1	13	13	1	17	17	1
22	11	2	26	13	2	34	17	2
33	11	3	39	13	3	51	17	3
44	11	4	52	13	4	68	17	4
55	11	5	65	13	5	85	17	5
66	11	6	78	13	6	102	17	6
77	11	7	91	13	7	119	17	7
88	11	8	104	13	8	136	17	8
99	11	9	117	13	9	153	17	9
110	11	10	130	13	10	170	17	10
121	11	11	**143**	13	11	**187**	17	11
132	11	12	156	13	12	204	17	12
143	11	13	169	13	13	**221**	17	12
154	11	14	182	13	14	238	17	14
165	11	15	195	13	15	255	17	15
176	11	16	208	13	16	272	17	16
187	11	17	**221**	13	17	289	17	17

Fig. 127

En la tabla se ve que los números 11 y 13 tienen común el 143 que corresponde al 11 repetido 13 veces y al 13 repetido 11 veces. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de 11 y de 13 es $143 = 11 \times 13$.

El común múltiplo entre 11 y 17 es $187 = 11 \times 17$.

El número 221 se encuentra en relación con el 13 repetido 17 veces y con el 17 repetido 13 veces; es decir, que el mínimo común múltiplo de los números primos 17 y 13 es $221 = 13 \times 17$

Para los números primos, pues, no se encuentra jamás un múltiplo común que sea inferior a su producto y, por lo tanto, este es el mínimo como múltiplo de los números primos.

Pero ya se ha visto que esto sucede con los números que no son primos, esto es, que son divisibles en partes iguales.

Volvamos a los números observados antes, 6 y 8 que tienen 24 como m. c. m. y analicemos sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 \end{array}$$

Analicemos ahora el 24 en sus factores primos y comparémoslo con los otros dos números.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 \\ 6 = 2 \times 3 \end{array} \qquad 24 = 2^3 \times 3$$

El 24, pues, se halla constituído por la combinación de factor 2 repetido 3 veces, como se ve en el 8 y el factor 3. Es decir el 2 con la mayor potencia existente en los números de los cuales se busca el m. c. m. y el factor 3.

Busquemos ahora en los tablas A y B otros múltiplos comunes; en relación con 4 y 6 el primer múltiplo común es 12. Hagamos el análisis y la comparación.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ 6 = 2 \times 3 \\ 4 = 2 \times 2 \end{array}$$

Esto confirma lo que habíamos observado anteriormente.

Otro ejemplo. Sean 6 y 9 cuyo primer múltiplo es 18.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 = 2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3 \times 3 \\ 9 = 3 \times 3 \end{array}$$

En los dos últimos casos, pues, el mínimo común múltiplo se encuentra compuesto por el conjunto de factores primos existentes en los números en su máxima potencia.

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$18 = 3^2 \times 2$$

Para realizar ejercicios de obtención del m. c. m. entre números mayores de 10 construiremos tablas análogas a la A y B donde se señalan los múltiplos sucesivos de cada número que se considera. Sean los números 14 y 18.

14	14	1	18	18	1
28	14	2	36	18	2
42	14	3	54	18	3
56	14	4	72	18	4
70	14	5	90	18	5
84	14	6	108	18	6
98	14	7	126	18	7
112	14	8			
126	14	9			

Fig. 128

En el primer espacio aparecen los múltiplos sucesivos del número y en la tercera fila el número de veces que el mencionado número fué repetido.

El primer múltiplo común de 14 y 18 es pues 126 y resulta de repetir 9 veces el 14 y 7 veces el 18. Procedamos ahora a su descomposición respectvia en factores primos y a la comparación.

14	2	18	2	126	2	$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$
7	7	9	3	63	3	$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
1		3	3	21	3	
		1		7	7	$14 = 2 \times 7$

El m. c. m. tiene como factores primos los de los números submúltiplos afectados del mayor exponente. $3^2 \times 2 \times 7$

Volvamos ahora a los grandes números sobre los que se operó antes: 60, 40, 48.

60	60	1	40	40	1	48	48	1
120	60	2	80	40	2	96	48	2
180	60	3	120	40	3	144	48	3
240	60	4	160	40	4	192	48	4
300	60	5	200	40	5	240	48	5
360	60	6	240	40	6	288	48	6

El m. c. m. de los tres números es 240 y se halla un múltiplo común de 60 y 40 en 120.

Analicemos ahora y comparemos los números 60, 40, 48, 240.

60	2	40	2	48	2	240	2
30	2	20	2	24	2	120	2
15	3	10	2	12	2	60	2
5	5	5	5	6	2	30	2
1		1		3	3	15	3
				1		5	5
						1	

$$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$$
$$60 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

El 240 está compuesto del 2 repetido 4 veces que se encuentra con su máxima potencia en el 48 y de los otros dos factores primos, el 3 y el 5.

Para el 120, múltiplo de 60 y de 40, obtenemos

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \qquad 120 = 2^3 \times 5 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Todos los factores primos aparecen en el m. c. m. el 2 en su mayor potencia.

Repitamos ahora el ejercicio buscando el m. c. m. de una mayor cantidad de números; 30, 36, 45, 60, 90.

30	30	1	36	36	1	45	45	1	60	60	1	90	90	180
60	30	2	72	36	2	90	45	2	120	60	2	180	90	
90	30	3	108	36	3	135	45	3	180	60	3			
120	30	4	144	36	4	180	45	4						
150	30	5	180	36	5									
180	30	6												

El m. c. m. hallado es 180.
Su análisis y descomposición

30	2	36	2	45	3	60	2	90	2	180	2
15	3	18	2	15	3	30	2	45	3	90	2
5	5	9	3	5	5	15	3	15	3	15	3
1		3	3	1		5	5	5	5	5	5
		1				1		1		1	

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3' \times 5$
$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$
$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$

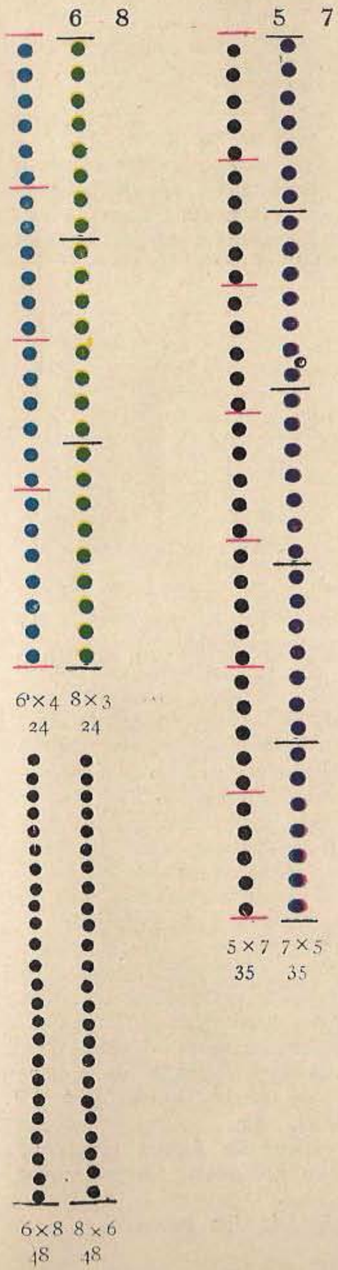
Los factores que representan las mayores potencias son $3^2 — 2^2 — 5$.

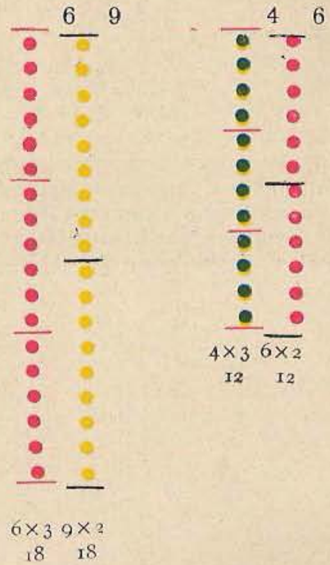
Comprobado que el m. c. m. se halla multiplicando los factores primos en que se descomponen los números dados y que tratándose de factores repetidos deben figurar los que tienen mayor potencia, busquemos, sobre esta base, el m. c. m. de los números 30, 55, 165, 66, 110, 22, 33.

30	2	55	5	165	5	66	2	110	2	22	2	33	3
15	3	11	11	33	3	33	3	55	5	11	11	11	11
5	5	1		11	11	11	11	11	11	1		1	
1				1		1		1					

Los factores primos obtenidos son: 2, 3, 5, 11.
Ninguno se halla elevado a potencia.
El m. c. m. se hallará pues multiplicando dichos factores entre sí. $2 \times 3 \times 5 \times 11 =$
$6 \times 5 \times 11 = 30 \times 11 = 330$.
Se puede comprobar que el 330 es divisible por todos los números dados.

Ejercicio de dibujo sobre mínimo común múltiplo





En este dibujo se ve cómo, relativamente, a los números divisibles el m. c. m. es siempre menor que el resultante de la multiplicación de aquéllos entre sí.

Fig. 129

POTENCIAS

Un modo de agrupar los números consiste en repetirlos tantas veces como números de unidades contienen, constituyendo de este modo un cuadrado, como hemos visto en el sistema decimal y después en la tabla de multiplicar.

$$\begin{array}{c} 2 \times 2 \\ 3 \times 3 \\ 4 \times 4 \\ 5 \times 5 \\ 6 \times 6 \\ 7 \times 7 \\ 8 \times 8 \\ 9 \times 9 \\ 10 \times 10 \end{array}$$

Dicho producto repetido otras tantas veces da un segundo grupo de resultados; el cubo de los números.

$$\begin{array}{c} 2 \times 2 \times 2 \\ 3 \times 3 \times 3 \\ 4 \times 4 \times 4 \\ 5 \times 5 \times 5 \\ 6 \times 6 \times 6 \\ 7 \times 7 \times 7 \\ 8 \times 8 \times 8 \\ 9 \times 9 \times 9 \\ 10 \times 10 \times 10 \end{array}$$

Hemos usado en el sistema decimal el cuadrado de perlas hecho con $10 \times 10 = 100$ y el cubo de perlas hecho con 10 cuadrados superpuestos $10 \times 100 = 1000$.

Tanto el nombre (cuadrado, cubo), como la forma empleada para representar aquellos grupos, permiten considerar los números desde un punto de vista geométrico.

Cuadrado y Cubo se llaman potencias de los números.

Cuando se trata de un número simple se dice que es su primera potencia, repetido por sí mismo se dice que se halla elevado a la segunda potencia (cuadrado) y se indica con un pequeño 2 colocado en la parte superior derecha del número primitivo. Cubo de un número se llama al número elevado a la tercera potencia y se indica con un pequeño 3 colocado en la misma forma que en el cuadrado.

Cuadrado de los números 1 al 10	Cubo de los números 1 al 10
$1 \times 1 = 1^2$	$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$
$2 \times 2 = 2^2 = 4$	$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
$3 \times 3 = 3^2 = 9$	$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$
$4 \times 4 = 4^2 = 16$	$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$
$5 \times 5 = 5^2 = 25$	$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
$6 \times 6 = 6^2 = 36$	$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$
$7 \times 7 = 7^2 = 49$	$7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 343$
$9 \times 9 = 9^2 = 81$	$8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$
$8 \times 8 = 8^2 = 64$	$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$
$10 \times 10 = 10^2 = 100$	$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$

En el material de perlas existe un sistema que representa en cantidades reales los cuadrados y cubos de los números del 1 al 10. Cada número conserva en sus potencias el mismo color que tienen los bastoncillos de perlas usados en las sumas.

Por cada número existe; el bastoncillo que lo representa; tantos cuadrados del mismo número como unidades contiene; un cubo construído con el mismo número de cuadrados; una cadena de perlas correspondiente al cuadrado, donde las diversas partes (el número repetido por sí mismo) son distintas; y una cadena correspondiente al cubo, donde son distintos los cuadrados y los simples bastoncillos que representan el número.

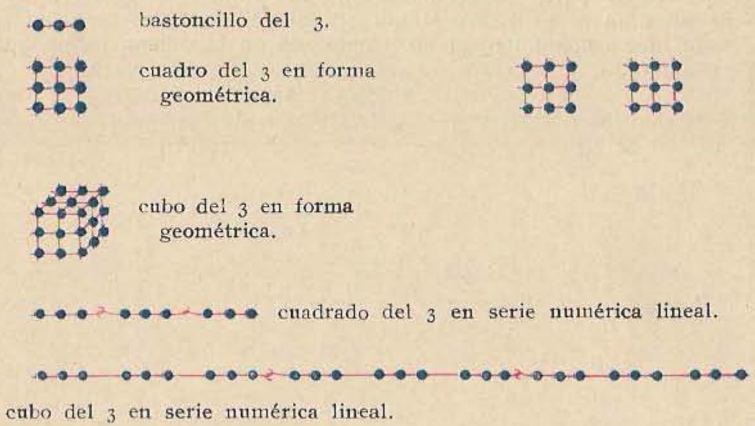
Este material permite estudiar separadamente los números en sus potencias y la comparación entre éstas.

Por ejemplo, la figura 130 representa la segunda potencia de los números 1 al 10 puesta en comparación, tanto en forma lineal como cuadrada, y a un lado se ven los bastoncillos de los números colocados gradualmente.

Teniendo suficiente espacio para disponer paralelamente y en toda su extensión las cadenas, se puede lograr a primera vista una idea real de la progresión geométrica de los números.

1	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

La forma de los cuadrados rígidos donde las perlas están ligadas, permite su superposición, así como las disposiciones más



Pongamos aquí un ejemplo del material, el relativo al 3 :

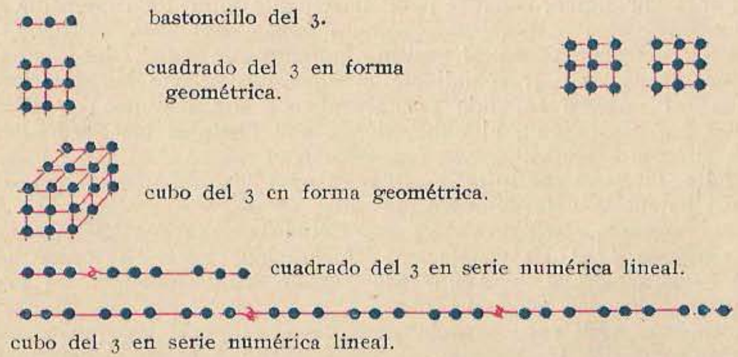
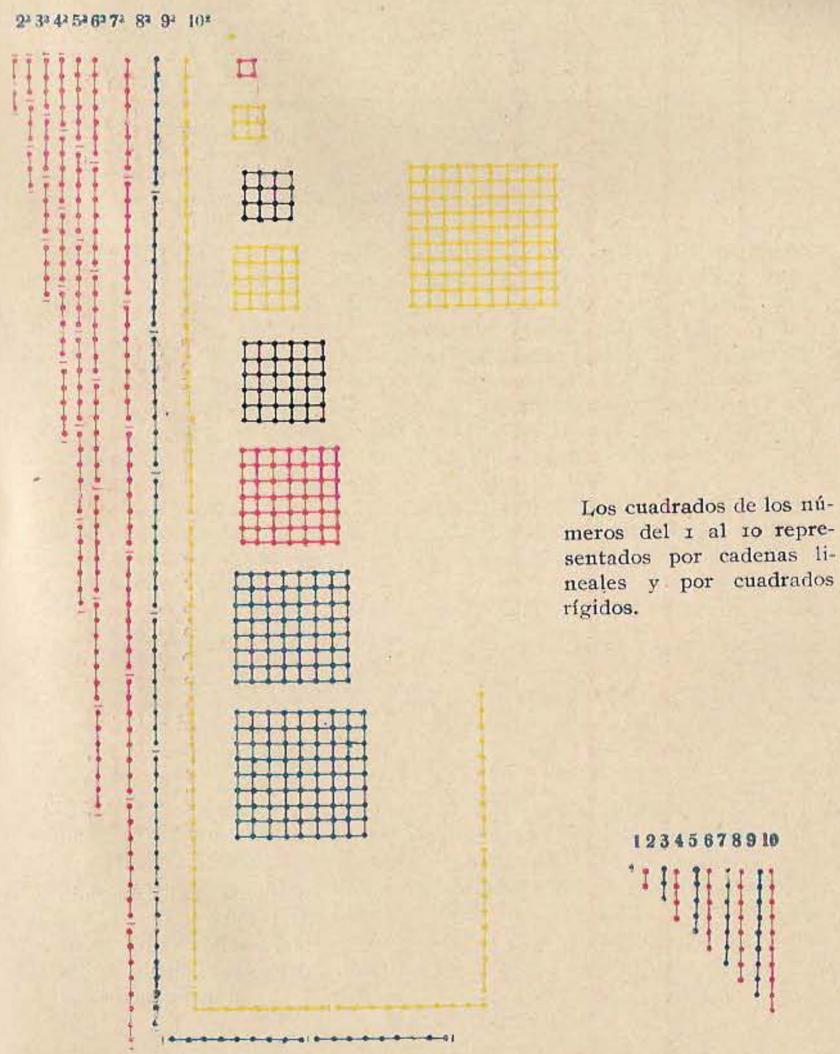
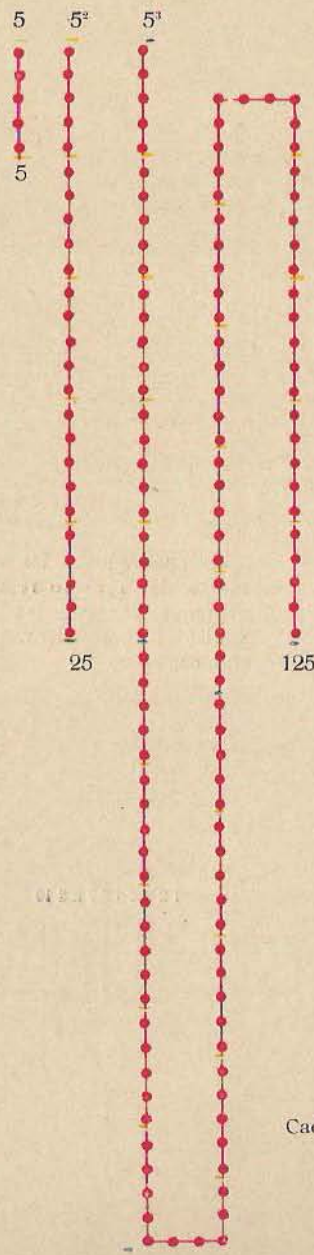


Fig. 130

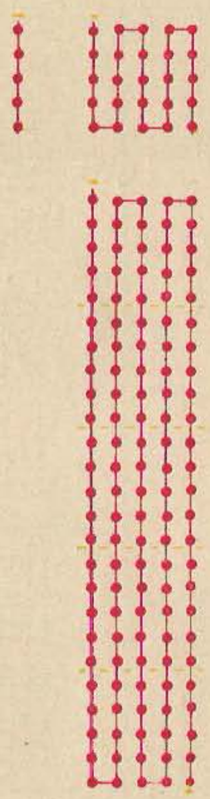


Los cuadrados de los números del 1 al 10 representados por cadenas lineales y por cuadrados rígidos.

Fig. 131



Cadena del 5 en forma lineal.



Cadenas del cuadrado y del cubo de 5 reunidos formando figura geométrica por medio de pliegues exactos.

Fig. 132

variadas adecuadas para hacer resaltar la relación entre sus dimensiones numéricas.

Comparando en la misma forma los cubos rígidos y las cadenas de los cubos, se observa la gran diferencia entre cuadrado y cubo de un número.

De este modo queda una idea sensible de las longitudes relativas al cuadrado y cubo de los números y de su progresión.

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
	4 8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Comparando los cuadrados rígidos con los cubos se ve como aumenta la tercera dimensión de éstos en relación con cada cuadrado. Cada cubo es superponible al cuadrado y viceversa, es, por lo tanto, en la tercera dimensión donde está la diferencia. El hecho de que para cada número existen cuadrados separados en cantidad suficiente para poder formar un cubo, permite la casi descomposición del cubo rígido, porque, aun cuando éste no sea modificable, los cuadrados separados lo pueden representar como descompuesto en sus partes y dar lugar a cálculos y comprobaciones.

Para cada cubo, sucede, que el número de perlas que lo constituyen en total es igual a las que forman el cuadrado repetido tantas veces como unidades tiene el número de donde se deriva. Sea el número 2.

$2 \times 2 =$ 4 el cuadrado
$4 \times 2 =$ 8 el cubo

Sea el número 5

$5 \times 5 =$ 25 el cuadrado
$25 \times 5 =$ 125 el cubo.

Los tres números iguales $5 \times 5 \times 5$ representan, efectivamente, las cantidades de perlas que se pueden contar en las tres aristas contiguas del cubo, es decir, los dos lados del cuadrado y después la arista que constituye la tercera dimensión. Que 5×5 indica el cubo de 5, y cómo lo representa es cosa evidente.

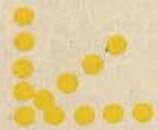


Fig. 133

Esto da una base numérica a la geometría que hace más claro el concepto del valor cúbico.

Si se colocan los cubos de perlas uno sobre otro, de modo que cada uno de ellos esté dispuesto centralmente con relación al anterior, se logrará una construcción semejante a la que hacían los niños pequeños edificando la torre roja.

Más aún, las dos torres de perlas, roja y de cubos, pueden compararse como un hecho aritmético puesto frente a un hecho geométrico y como una correlación entre números y magnitudes.

Los cubos, desde el mayor al más pequeño, tienen una arista que, medida en centímetros, es respectivamente de

10,9,8,7,6,5,4,3,2 y 1.

Por analogía puede saberse cuantos cm^2. tiene la cara de cada cubo de madera. Estas miden en cm. respectivamente:

10^2	9^2	8^2	7^2	6^2	5^2	4^2	3^2	2^2	1^2
100	81	64	49	36	25	16	9	4	1

Y el volumen de los cubos se puede averiguar de igual modo:

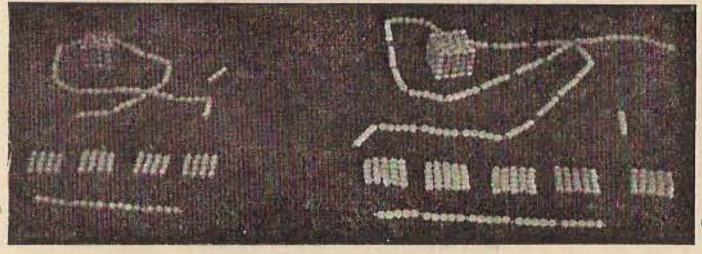
10^3	9^3	8^3	7^3	6^3	5^3	4^3	3^3	2^3	1^3
1000	729	512	343	216	125	64	27	8	1

Por lo tanto, el mayor cubo es igual 1000 veces el cubo pequeño que está en la cima de la torre y que representa la unidad del sistema.

Una de las aplicaciones de las *cadenas* es, la de *contar* por unidades y por grupos. La fascinación que ejercen estas cadenas de brillantes perlas de colores, suscita en los niños una actividad incansable para contar.

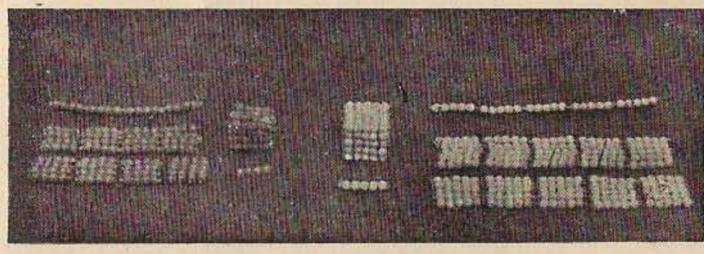
Ello hace pensar en una relación psicológica entre la forma del rosario, esto es, las perlas enfiladas, y el mecanismo de contar que ha dado a católicos y musulmanes un instrumento cuyo uso no produce cansancio; y también el hecho de que las perlas enfiladas se llamaran cuentas, esto es, instrumento para contar, explica en parte el fenómeno singular que se observa en nuestras escuelas, o sea, la paciencia que ponen los pequeños en la operación de contar las cadenas del sistema.

Especialmente la cadena del millar, es decir, la cadena más larga atrae, y se observa en los niños como cuentan una a una todas las perlas hasta el fin. Como dicha labor es fatigosa y los niños no pueden realizarla de una sola vez, vuelven al siguiente día a comenzar la operación donde la habían dejado el anterior. Por ejemplo, si habían dejado el número 350, vuelven a contar al día siguien-



Cuadrado y cubo del cuatro y cinco con las perlas

Fig. 134

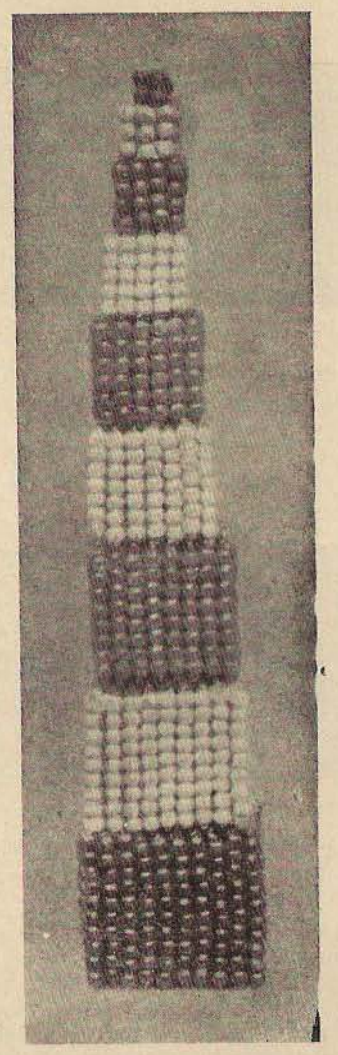


Cuadrado y cubo del cuatro y cinco. Las cadenas de los cubos están replegadas sobre sí mismas y sujetas con alfileres

Fig. 135

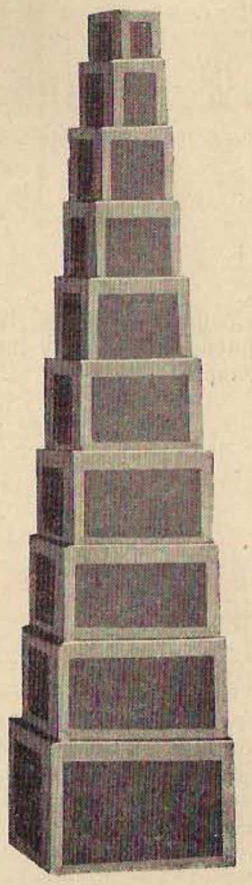
te a partir del 351 y, para ello, dejaron una señal en la cadena sobre el 350, señal que es escrupulosamente respetada por los demás.

También el contar por grupos es una labor interesante. Lo más sencillo es contar por grupos la cadena del millar que nos recuerda el sistema decimal: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 y después 100, 200, 300 etc.



El cubo de los números sobrepuestos en forma de torre

Fig. 136



La Torre

Fig. 137

El contar por grupos se convierte en un estudio de memorización para las otras cadenas. También para esto existe un material de pequeños cuadrados de cartón del mismo color que las perlas y que se pueden colocar sobre los segmentos siempre visibles en las cadenas. Por ejemplo :

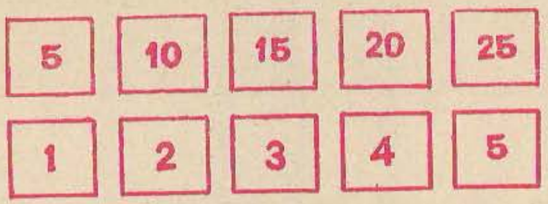


Fig. 138

En el dorso de los pequeños carteles hay un número progresivo de tamaño muy pequeño y cuyo color indica en cada uno a que grupo pertenece. Por ejemplo :

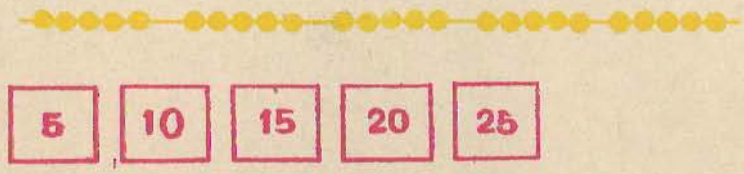


Fig. 139

Lo que facilitará el contar por 5, 10, 15, 20, 25 etc.

El hecho, además, de que las cadenas son plegables, siendo rígidos solamente los pequeños bastones del número (por ejemplo el 5) hacen posible el replegar aquéllas, de modo que forme un cuadrado, o también con las cadenas del cubo una fila de tantos cuadrados como son las unidades del número, como se observa en la figura 132 respecto al número 5.

Tales agrupamientos y comprobaciones dan lugar a estudios intuitivos y nuevas memorizaciones.

Contar por 3 hasta el cubo de 3.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Por 4 hasta el cubo de 4.
4, 8, 12, 16... 20, 24, 28, 32, 36,... 64.

Contar por 5 hasta el cubo de 5.
5, 10, 15, 20... 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125.
y así sucesivamente.

La misma *cantidad de números* que crece contando por grupos hasta el cubo de cada número, plasma por otra parte el concepto de «potencia numérica».

La potencia siempre más lejana a la que se alcanza con un esfuerzo siempre mayor.

Por ejemplo : contar por 8 hasta el cuadrado y después el cubo de 8.

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64... etc.

Con esta serie de numeraciones se aprende a contar los *múltiplos* de los números.

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

ANALISIS Y ESTUDIOS SOBRE RELACIONES

Además de los ejercicios que se refieren a la adquisición de los primeros conocimientos esenciales, se pueden introducir elementos de un estudio más a fondo que, atrayendo la atención y la actividad del niño, lo preparan para un progreso hacia conocimientos esenciales más elevados. Son conjuntamente una repetición de lo ya conocido conducido en diversas formas por el material, y un puente fácil y agradable hacia los estudios venideros. Esto sucede con los ejercicios que los niños han llamado: «Juegos sobre la multiplicación».

Unos permiten volver una y otra vez sobre cálculos que es necesario memorizar, y otros representan la ocasión de ejercitarse en la jerarquía y, finalmente, existen juegos complejos que encierran conjuntamente ambas dificultades y que requieren la cooperación de varios niños (como el juego de la banca). Todos estos juegos se prestan a observaciones sobre el orden y distribución de los grupos numéricos. Dicho estudio que, enunciado en esa forma, podía parecer prematuro, e inadaptado, por lo mismo, para interesar a los niños, se hace, en cambio, apasionante si a la aridez de las cifras se sustituyen objetos atrayentes y de colores que puedan desplazarse para componer y recomponer grupos de perlas, de dibujos o construcciones. Con todos estos juegos utilizan, no sólo el material de los bastones de perlas que representan los números de uno a diez, sino casi todo el material de perlas que será descrito posteriormente, y en particular los cuadrados y cubos relativos a los números dos al nueve.

Un ejercicio preliminar utiliza solamente los bastones, y consiste en disponer uno debajo del otro los bastones iguales repetidos diez veces. Cuando se ha llegado al cuadrado del número se deja un espacio y se continúa debajo de la acumulación en columnas. En este ejercicio sencillísimo, los niños han encontrado tal interés, que para facilitarlo se prepara una especie de bandeja de bordes salientes que tiene un fondo de terciopelo, con el fin de, que sus bastones no resbalen. La disposición del material es la indicada en la figura 140.

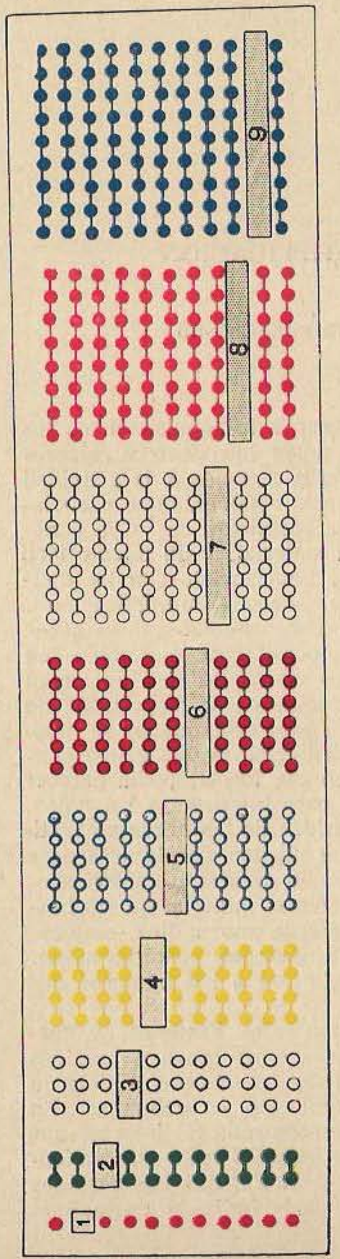


Fig. 140

La figura reproduce en su conjunto todas las combinaciones numéricas halladas en los primeros ejercicios con el material de la tabla pitagórica y se podrían reproducir los mismos cálculos, contando las unidades que se vienen acumulando cada vez que se añade un nuevo bastón a una columna. Aquí, sin embargo, todo permanece estable y ofrece un conjunto que se presta a la observación. En efecto, a cada número sucesivo se ve agrandar el relativo cuadrado y reducirse en altura el rectángulo de abajo. Bajo la unidad hay una alta fila de nueve perlas colocado horizontalmente. Calculando los cuadrados se encuentran los números 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; aquellos números que señalan los límites en la tabla de multiplicación simplificada. El producto del grupo entero correspondiente a cada bastón se calcula fácilmente, porque siendo diez las filas se obtiene sucesivamente los siguientes números: 10, 20... 80, 90. Y, por esto, reduciendo el cálculo a la forma decimal se podrían colocar inmediatamente debajo de las columnas tantos bastones de diez como corresponden al grupo, o sea 1,2,3,4,... hasta 9. Más allá vendría el cuadrado de 10 que es distinto de todos los grupos porque es entero, mientras hasta 9 los grupos han podido dividirse en dos partes. He aquí, pues, cómo el cuadrado de 10 está fuera de los caracteres de todos los grupos considerados; éste es una unidad superior.

Cuando se quiere calcular el rectángulo que está en la parte inferior de cada cuadrado, se puede hacer por medio de una multiplicación, por una sustracción, o también, por medio de una combinación de ambas operaciones. Por ejemplo, considerando el 4 se puede hallar multiplicando $4 \times 6 = 24$ o también sustrayendo a 40 el cuadrado de $4^2 = 16$; $40 - 16 = 24$. El cálculo de cada una de las colum-

nas, sumando conjuntamente el cuadrado y el rectángulo correspondiente, es

$$
\begin{aligned}
10 &= 1 + 9\\
20 &= 4 + 16\\
30 &= 9 + 21\\
40 &= 16 + 24\\
50 &= 25 + 25\\
60 &= 36 + 24\\
70 &= 49 + 21\\
80 &= 64 + 16\\
90 &= 81 + 9
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que los rectángulos representan cantidades simétricas en torno a 25 o sea al cuadrado de 5. Por lo tanto, el cuadrado permanece siempre como centro de simetría. Pero, los rectángulos indicados por las perlas, tienen una diversa distribución de las partes aún siendo iguales en la totalidad de las unidades. En efecto, uno de los rectángulos del 24 es igual a seis bastones de 4 y el otro a cuatro bastones de seis. Así un 21 a siete bastones de 3 y el otro a 3 bastones de 7. Después viene un 16 formado por ocho bastones de 2 y el otro por 2 bastones de 8; finalmente, existe un nueve formado por nueve perlas sueltas y otro constituído por un bastón de 9. La posición de los rectángulos está en sentido inverso; por una parte aparecen verticales sobre el lado menor y, de otra, se apoyan sobre el lado mayor, pero si aquellos grupos que forman un rectángulo se sacan para disponerlos en el mismo sentido, se puede comprobar materialmente su igualdad. Las diferencias numéricas entre los rectángulos son fáciles de calcular:

$$
\begin{aligned}
25 - 24 &= 1\\
24 - 21 &= 3\\
21 - 16 &= 5\\
16 - 9 &= 7
\end{aligned}
$$

Esto es, la serie de los números impares. Entre dichos números la diferencia es 2:

$$
\begin{aligned}
7 - 5 &= 2\\
5 - 3 &= 2\\
3 - 1 &= 2
\end{aligned}
$$

He aquí, pues, correspondencias interesantes que hacen ya reconocer en el número la soberana cualidad del orden y de la ley.

El estudio de la disposición de los números, que se encuentra en la tabla de multiplicación, es un trabajo distinto de la memorización de los resultados y no requiere ya la reducción al mínimo de los números a recordar, sino que hace necesaria la presencia de todas las combinaciones para que resalte la relación entre ellas. Semejante estudio podría creerse poco interesante para un niño, pero si las cifras se sustituyen por objetos atrayentes y coloreados que puedan desplazarse y que se presten a realizar combinaciones, componiendo y descomponiendo los grupos, entonces, el estudio de los números se hace apasionante. Un primer ejercicio consiste en construir poco a poco las combinaciones referentes a la tabla de multiplicación comenzando por los dos primeros números 1 y 2.

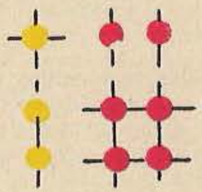


Fig. 141

La figura permite encontrar, en sentido diagonal, los dos cuadrados de 1 y de 2 y después dos rectángulos iguales formados, sin embargo, por un lado con dos perlas separadas y, por el otro, con un bastón de dos perlas. Prosiguiendo al número 3, se obtiene la disposición indicada en la figura siguiente.

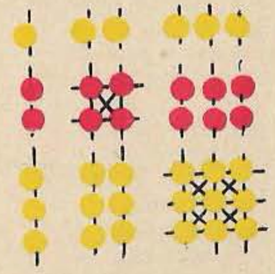


Fig. 142

Los tres cuadrados (1, 2, 3) están sobre la diagonal y, en vez de construir estos cuadrados con bastones sueltos se colocan los correspondientes cuadrados de perlas que se hallan formados en el material. Encima del cuadrado de 3 hay un grupo de seis perlas cons-

tituído por tres bastones de 2 y a la izquierda un grupo de 6 perlas formado por 2 bastones de 5. Añadiendo las combinaciones del 4

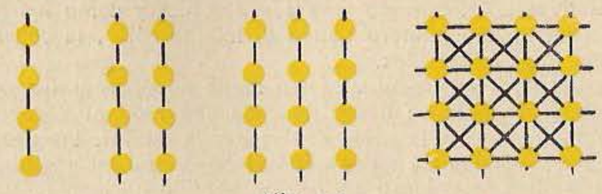


Fig. 143

se preparan las combinaciones 4 × 1, 4 × 2, 4 × 3, 4 × 4; el cuadrado de 4 viene a quedar en sentido diagonal, después del cuadrado de 3; queda ahora por rellenar el espacio superior al cuadrado de 4, que estará compuesto por los productos inversos de los precedentes, es decir, 3 × 4, 2 × 4, 1 × 4. En la figura siguiente está representada la construcción de los grupos hasta el 5 inclusive.

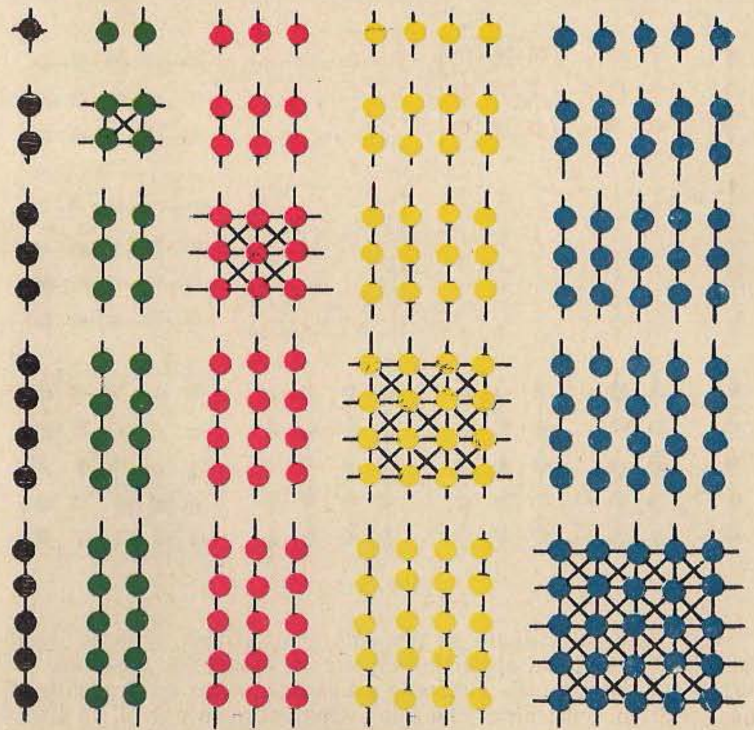


Fig. 144

Ahora bien, dichas construcciones están realizadas en tal forma que, sobre cada línea horizontal se hallan dispuestas las combinaciones relativas a un número solo 1,2,3,4,5... y como los bastones relativos a un mismo número tienen el mismo color, la construcción resulta por fajas coloreadas.

Construcciones en ángulo. Otro modo de ordenar las combinaciones puede consistir en hacer de cada cuadrado el vértice de un ángulo, combinando en la parte superior y la lateral, los grupos con bastones correspondientes todos ellos al cuadrado del ángulo. En tal caso los bastones se colocan arriba, en sentido horizontal, y al lado en sentido vertical.

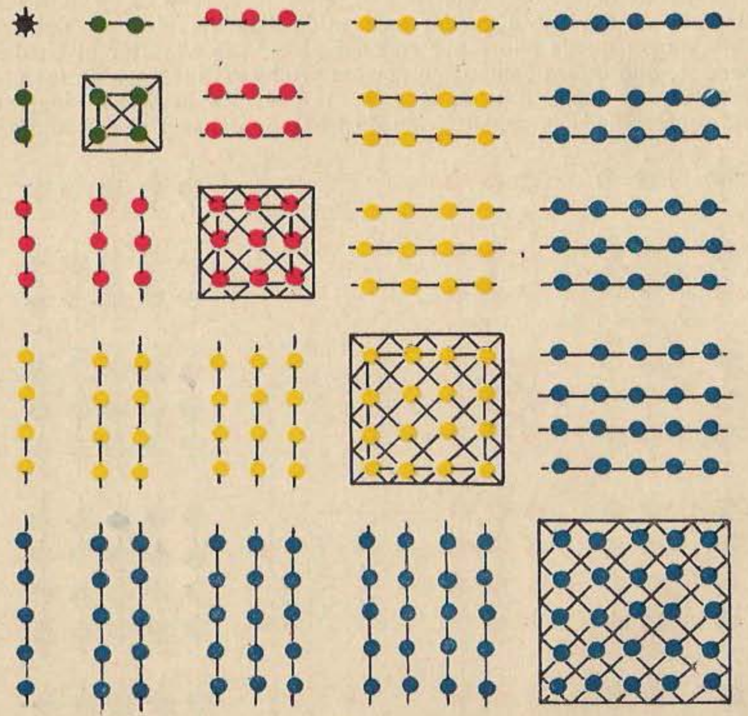


Fig. 145

En este caso la figura se presenta, no en fajas, sino en ángulos del mismo color. Un ejercicio consiste en contar los bastones libres correspondientes a cada cuadrado y buscar cuantos cuadrados iguales más, podrían construirse con ellos. Comencemos por el 2 ; hay dos bastones de dos, uno encima y otro al lado del cuadrado de 2, con los

cuales puede construirse otro cuadrado de 2. La suma de las unidades relativas a la faja angular del 2 es, pues, igual a dos cuadrados de 2, pero, esto es precisamente el cubo de 2.

Observemos ahora la faja angular del 3. Existen en la parte superior tres bastones de 3 (2 + 1) e igualmente al costado (2 + 1), luego se pueden construir otros dos cuadrados de 3. La suma es, pues, tres cuadrados de 3, o lo que es igual, tres elevado al cubo. En la faja del 4 existe un grupo de tres bastones junto al cuadrado de 4 y lo mismo sucede en el lado. Quedan dos bastones a cada lado, que, en conjunto constituyen otro cuadrado. Son, pues, 4 los cuadrados de 4 y la suma total es cuatro elevado al cubo. Lo mismo sucede con el 5, como lo demuestra la figura siguiente :

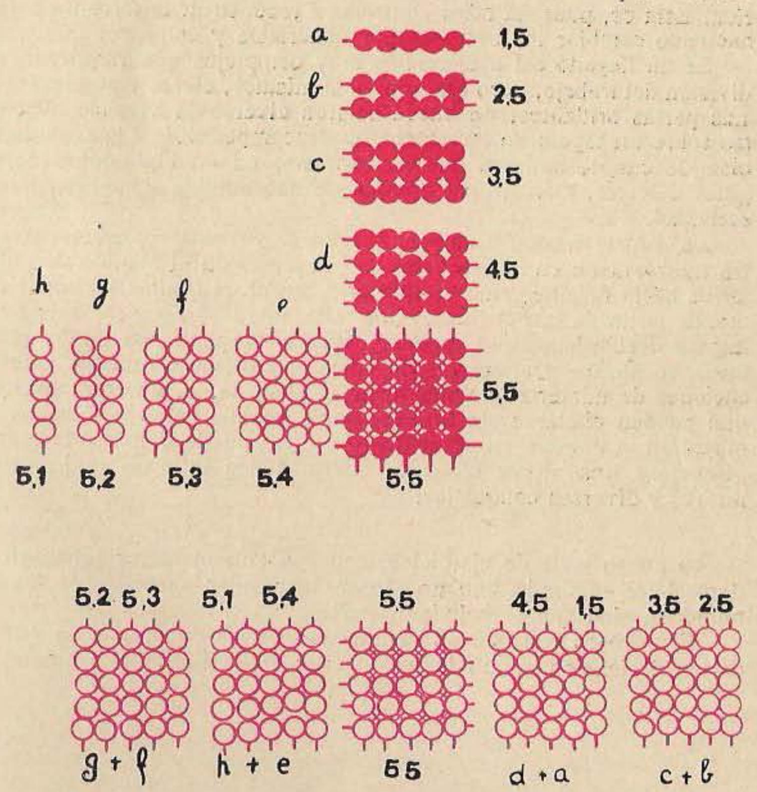


Fig. 146

Análogamente sucede con las combinaciones que se refieren a todos los otros números; por lo tanto, el resultado de todas las combinaciones numéricas existentes en una tabla de mul.iplicación de 1 a 10 es igual a la suma de los cubos de los números 1 a 10. Por ello, los cubos de perlas que se pueden superponer, formando una torre, corresponden, en cuanto a valor, al bello tapiz de perlas, de ángulos de colores, que representa las combinaciones numéricas de la tabla de Pitágoras. Esto se presta a ejercicios colectivos, análogos a los vistos en el sistema decimal, donde un niño actúa de banquero para los cambios y las descomposiciones: es decir, en un caso determinado deshacer los cubos, o sea cambiarlos por los cuadrados y bastones correspondientes, y de ese modo, poco a poco, construir, deshaciendo la torre de perlas, el tapiz de colores que representa la tabla pitagórica. Esta es, pues, la labor contraria a reconstruir la torre de perlas, haciendo cambiar los bastones por cuadrados y éstos por cubos.

Se ha llegado así a ejercicios muy complejos que requieren una división del trabajo, pero que son en sí mismos, claros y atrayentes (1) Las perlas brillantes, de nueve colores diversos y vivaces, dispuestas sobre un tapete de terciopelo, la descomposición y la reconstrucción de cubos, la torre que se convierte en un bello tapiz de ángulos de color, ejercen una fascinación que empuja a una apasionada actividad.

Los niños tienden siempre a realizar trabajos colosales. Nuestra intervención en las escuelas, no es jamás en el sentido de empujarles hacia delante, sino al contrario, en el de *limitar* y conducir la mente hacia la simplicidad. Con ello no pretendemos impedir el ímpetu desbordante que conduce, cuando se pone una nueva clave, hacia el infinito. Dejamos a los niños el entusiasmo de las multiplicaciones de números grandes hasta el absurdo, o, de construcciones que pueden dilatarse sin límites, pero, cuando estos fenómenos demuestran la entrada en un mecanismo que puede dominar la mente, ofrecemos una nueva clave de indagaciones infinitas que permite nuevas y diversas conquistas.

La nueva serie de ejercicios, consiste en considerar agrupaciones dentro del cuadrado que no siguen la regular sucesión de los números, sino que prescinden de ella.

El primero consiste en dividir uno de los cuadrados de 100 e partes desiguales, como indica la cruz en la figura que sigue:

(1) Este ejercicio se debe a la señorita Isabel Belavéry Bouchard, de Budapest, directora de una escuela Montessori.

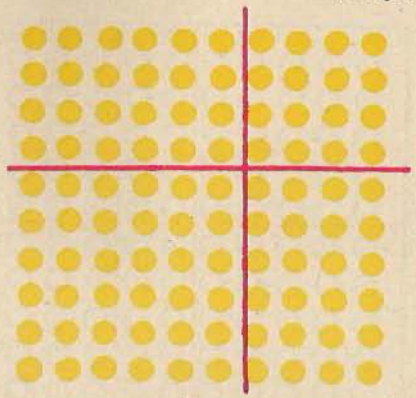


Fig. 147

o, también, colocar cintas entre las perlas que señalan la separación de las partes. Efectuando las operaciones relativas a las perlas, que se hallan dentro de cada grupo, y sumando los productos, se debe obtener el mismo número de perlas que forman el cuadrado total o sea 100.

Es decir:

$$\begin{array}{lcr} 4 \times 4 = & 4^2 = & 16 \\ 6 \times 4 = & & 24 \\ 4 \times 6 = & & 24 \\ 6 \times 6 = & 6^2 = & \underline{36} \\ & & 100 \end{array}$$

Se obtienen, pues, dos cuadrados diferentes 4 y 6 y dos rectángulos iguales, pero inversos. Cada lado del cuadrado, que es de 10, ha sido dividido en estas dos partes, 4 y 6. La operación puede expresarse así: $10^2 = (4 + 6)^2 = 4^2 + 6^2 + 2\ (4 \times 6)$.

Apenas ofrecido este nuevo punto de cristalización en aquella madurez mental que se ha formado, ha surgido una construcción maravillosa, que nos ha obligado a ofrecer otros materiales, no ya de perlas, sino, de carteles que tienen los cien puntos dispuestos en cuadrado; venían divididos y subdivididos por líneas y el trabajo consistió únicamente en procurar la posibilidad de muchas pequeñas multiplicaciones en el interior que concluían por dar siempre el mismo resultado de 100. Viene después la consideración sobre la cantidad y disposición de las figuras que se derivan; los cuadrados se encuentran siempre sobre la diagonal y los rectángulos se disponen simétricamente de un lado y de otro, resultando sus productos iguales dos a dos. Los cuadrados son tantos, como las partes del lado subdividido. En este caso

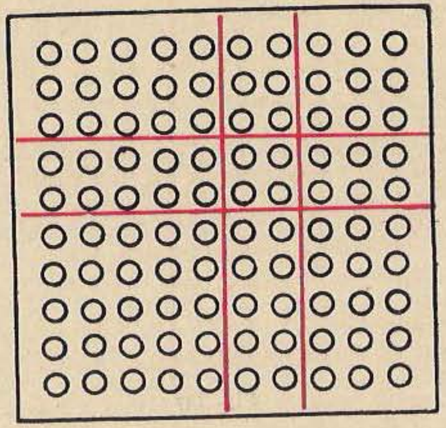


Fig. 148

son tres : 3, 2 y 5

3 × 3 —	9 ——	3^2
3 × 2 —	6 ——	
3 × 5 —	15 ——	
2 × 3 —	6 ——	
2 × 2 —	4 ——	2^2
2 × 5 —	10 ——	
5 × 2 —	10 ——	
5 × 3 —	15 ——	
5 × 5 —	25 ——	5^2
	100	

Este trabajo conduce a repetir los productos parciales entre los números más variados y sin progresión entre ellos, de esa forma, se llega al ejercicio, llamado en las escuelas : *repetir los productos a saltos.*

Bien pronto los cuadrados de 100 puntos se muestran insuficientes, y, de esta forma, surgieron los cuadrados de 12, 15 y 20 puntos de lado. Basta conocer el número total de los puntos correspondientes al cuadrado en el cual se trabaja : 12 × 12 = 144, 15 × 15 = 225, 20 × 20 = 400, para tener el resultado, al cual, deben alcanzar juntos los productos de las correspondientes combinaciones.

Los ejercicios se hacen complejos en dos sentidos, esto es : a) de aumentar siempre la cantidad de subdivisiones del cuadrado, b) de observar las disposiciones relativas y, por lo tanto, las relaciones entre las figuras resultantes. El punto de partida de cada ejercicio, consiste en subdividir el lado del cuadrado en partes, así que el lado

mismo se convierte en una suma de las partes en que ha sido dividido.

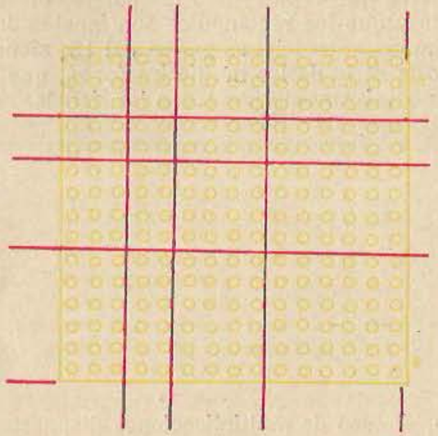


Fig. 149

En un cuadrado de 15 (figura 149) se determinaron en 3 + 2 + 4 + 6. Por medio de líneas paralelas se señalan en todos los lados del cuadrado las mismas subdivisiones y, de ese modo, quedan delimitadas muchas figuras. Las multiplicaciones a efectuar son en número de 16 = 4 × 4 porque el lado del cuadrado ha sido dividido en 4 partes. En efecto :

1ª —	3 × 3 =	9 ——	3^2
2ª —	3 × 2 =	6	
3ª —	3 × 4 =	12	
4ª —	3 × 6 =	18	
5ª —	2 × 3 =	6	
6ª —	2 × 2 =	4 ——	2^2
7ª —	2 × 4 =	8	
8ª —	2 × 6 =	12	
9ª —	4 × 3 =	12	
10ª —	4 × 2 =	8	
11ª —	4 × 4 =	16 ——	4^2
12ª —	4 × 6 =	24	
13ª —	6 × 3 =	18	
14ª —	6 × 2 =	12	
15ª —	6 × 4 =	24	
16ª —	6 × 6 =	36 ——	6^2
		225	

La suma total de los puntos, calculada separadamente según las subdivisiones del cuadrado de 15, es igual a 225.

Mirando la figura, se observa cómo en el cálculo recorre el cuadrado de los números que representan las partes, en las cuales está el lado subdividido y que los rectángulos son iguales dos a dos y están distribuídos simétricamente. Las partes del 15, siendo 3, 2, 4, 6, se ve, observando la serie de las multiplicaciones, que cada número, está multiplicado sucesivamente por todos los demás.

3. 3	2. 3	4 3	6. 3
3. 2	2 2	4 2	6. 2
3. 4	2. 4	4 4	6. 4
3. 6	2. 6	4 6	6. 6

Tabla A.

Es este, pues, el caso de multiplicaciones dispuestas en cuadrado donde cada parte de un lado está multiplicada sucesivamente por todas las partes del otro, siendo iguales y correspondientes las subdivisiones de los lados. Esto se puede representar numéricamente en la siguiente forma :

$$
\begin{array}{l}
15 \,.\, = \\
\quad 15 = (3 + 2 + 4 + 6). \quad (3 + 2 + 4 + 6) = \\
\quad + (3.\ 3) \ + (3.\ 2) \ + (3\ \ 4) \ + (3\ \ 6) \ + \\
\quad + (2.\ 3) \ + (2.\ 2) \ + (2.\ 4) \ + (2.\ 6) \ + \\
\quad + (4.\ 3) \ + (4.\ 2) \ + (4.\ 4) \ + (4.\ 6) \ + \\
\quad + (6.\ 3) \ + (6.\ 2) \ + (6.\ 4) \ + (6.\ 6)
\end{array}
$$

Tabla B.

es decir ; cada uno de los números del primer paréntesis viene multiplicado por cada uno de los contenidos en el segundo ; esto resulta más claro escribiendo, de un color, las cifras del multiplicando y, de otro color, la del multiplicador y para no confundir los signos, poniendo como signo de la multiplicación, un punto, para distinguirlo de las cruces que indican la suma.

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

Los dos juegos, que vamos a describir, son el resultado de esfuerzos y tentativas hijas de nuestro deseo de secundar la actividad de los niños y han quedado como aportación eficaz, y ahora ya, indispensable. El apelativo de «Juegos» demuestra el interés y la alegría que suscitan.

Son ejercicios que salen del campo de la escuela, para seguir los niños hasta sus casas, bajo forma de útil pasatiempo para ellos y sus amigos.

JUEGO DEL TABLERO

Este es una aplicación de la multiplicación analizada en forma geométrica.

Un tapete está preparado de modo que representa espacios cuadrados de dos colores en filas diagonales, como en el tablero de un juego de damas. (Fig. 150).

El tablero es rectangular y tiene un lado de cuatro cuadrados y el otro de seis o más.

Los cuadrados tienen el lado de 7 centímetros aproximadamente y en ellos cabe un bastón de nueve perlas.

Encima y a la derecha, en correspondencia con los cuadrados, está indicada la jerarquía de los números : 1, 10, 100, 1000 etc. de tal modo, que la unidad simple comienza en ambos lados a partir del cuadrado extremo superior de la derecha.

Encima de estas indicaciones hay espacios vacíos donde se ponen los números, arriba los del multiplicando, a la derecha los del multiplicador. Los productos relativos a las unidades del multiplicador se colocan en la fila superior de cuadrados, los de las decenas en la segunda, etc. ; es decir, en la línea que corresponde a cada cifra del multiplicador comenzando siempre por el primer cuadrado de la derecha de cada fila.

Lo mismo si se multiplican unidades por unidades, que millares del multiplicador, comenzando siempre por el primer cuadrado de la fila.

Si el número de un producto resulta de dos cifras, por ejemplo : 3 × 6 = 18, el 1 y el 8 se colocan en dos cuadrados adyacentes de la misma línea, el 1 a la izquierda del 8.

El material que se usa es el de los bastones de perlas. Si por ejemplo, la multiplicación indicada 3 × 6 fuera de tres millares del multiplicador y 6 unidades del multiplicando, debería colocarse 3 × 6 = 18, un bastón de ocho perlas en el cuadrado del mil, y una perla en el cuadrado situado inmediatamente a la izquierda del anterior.

```
  3649 ×
   467
 ------
  25543
 21894
14596
-------
1704083
```

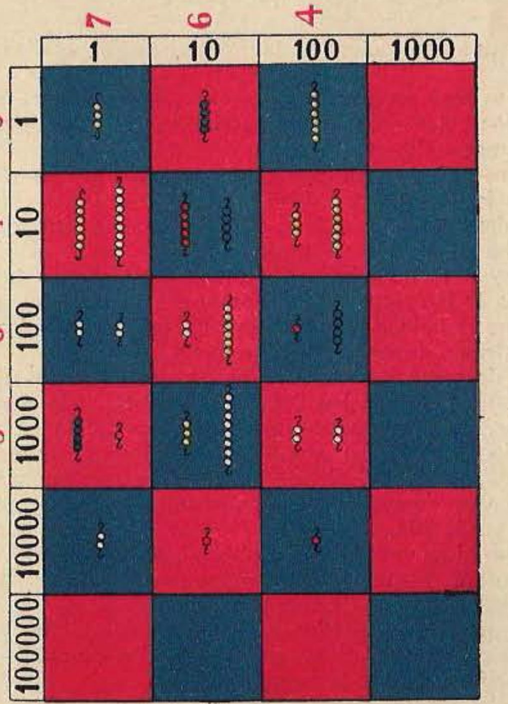


Fig. 150

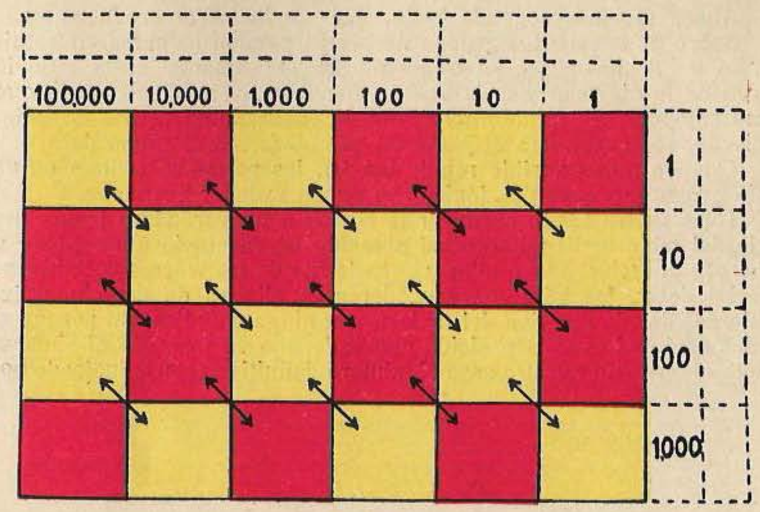


Fig. 151

Al final de la operación, muchos cuadrados aparecen ocupados por varios grupos de perlas. Por ejemplo, la multiplicación 3424 × 526 daría lugar a la distribución de perlas que aparece en la figura 152.

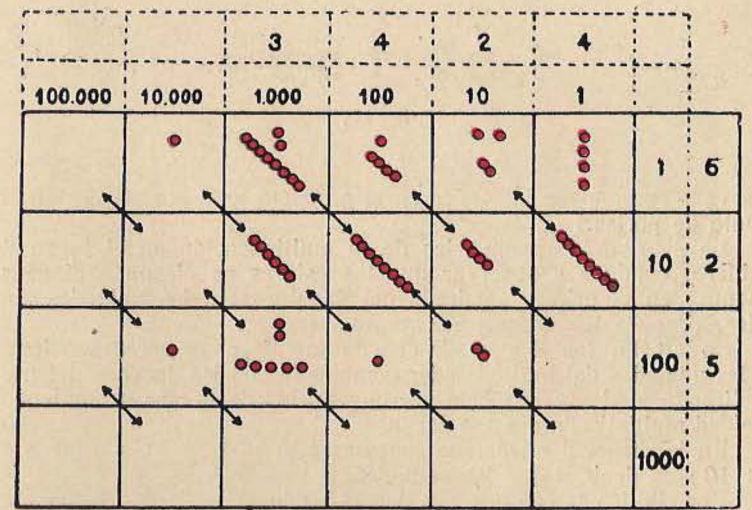


Fig. 152

Ahora viene la segunda parte, que conducirá al producto total.
Sobre el tablero los grupos de perlas pueden sumarse en sentido de las flechas o sea en diagonal. Se van sumando hasta 10 a lo largo de la diagonal y cada vez se convierte en una sola perla que pasa entonces, en sentido horizontal, al cuadrado adyacente de la izquierda, sea cualquiera el plano en que se forma el grupo de 10.

Cuando no es posible reunir las 10, las perlas se reunen en un solo grupo que, como es lógico, no puede exceder de nueve.

Tales reglas hacen asemejar la acción a un verdadero juego que sale del tablero. El número así obtenido ha resultado «vencedor» y liberado del tablero va a alinearse en la fila de los valores definitivos

Es decir, los números vencedores se alinean de derecha a izquierda, debajo o arriba del tablero, sin ninguna indicación porque el valor está dado por la posición que cada uno va tomando al situarse junto al otro. En nuestro caso el número definitivo estaría indicado por

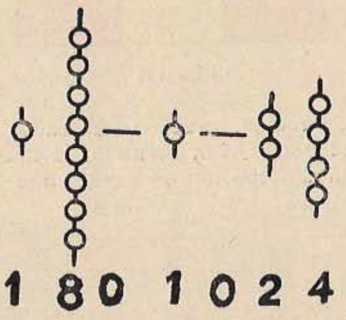


Fig 153

(Los ceros están indicados en el producto total por un bastón carente de perlas.)

La distribución geométrica de la multiplicación en el juego del tablero, conduce a observar que los valores se disponen diagonalmente ; en el primer cuadrado del ángulo están las unidades simples, después las decenas, centenas, etc.

En efecto, los dos cuadrados de las decenas correspondientes a las unidades del multiplicador combinada con las decenas del multiplicando y viceversa ; esto es, que en los dos casos se obtiene la unidad multiplicada por las decenas.

En la diagonal adyacente tenemos 100 × 1 y 1 × 100 o 10 × 10 : es decir, todas las centenas.

Por ello las sumas que nos dan el producto total, deben ser efectuadas en los cuadrados situados diagonalmente.

JUEGO DEL BANQUERO

El juego que sigue llamado «Juego del Banquero» permite la visión completa de todas las particularidades del procedimiento de una multiplicación y es paralelo a los ejercicios con marcos o bastidores.

MATERIAL BANCARIO

1000000	100000	10000	1000	100	10	1
2000000	200000	20000	2000	200	20	2
3000000	300000	30000	3000	300	30	3
4000000	400000	40000	4000	400	40	4
5000000	500000	50000	5000	500	50	5
6000000	600000	60000	6000	600	60	6
7000000	700000	70000	7000	700	70	7
8000000	800000	80000	8000	800	80	8
9000000	900000	90000	9000	900	90	9

Multiplicador

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Multiplicando

1	10	100	1000
2	20	200	2000
3	30	300	3000
4	40	400	4000
5	50	500	5000
6	60	600	6000
7	70	700	7000
8	80	800	8000
9	90	900	9000

0	0 0	000

Fig 154

El material es de cartón y se sitúa en una especie de «Mesilla de juego». El ejercicio que ahora describiremos, es un ejercicio colectivo que hace necesaria la colaboración de dos o tres niños y llama en torno a la mesa un pequeño público vivamente interesado. Pero son dos los principales personajes de esta acción compleja ; el niño que efectúa la operación y el «Banquero» que tiene en depósito todos los valores y efectúa los «cambios» que se hacen necesarios de vez en cuando. Además hay un tercer personaje secundario que anota los números. El «material bancario» consiste en carteles que tienen escritas las series de los números en todas las jerarquías, desde la unidad simple, hasta las centenas de millar.

Otros carteles diversos representan los millones.

Los carteles tienen todos la misma altura, pero su longitud es distinta según el número de ceros que siguen a la cifra positiva, y teniendo dimensiones correspondientes pueden superponerse en forma, que aparezcan las cifras positivas en el lugar de los ceros, como

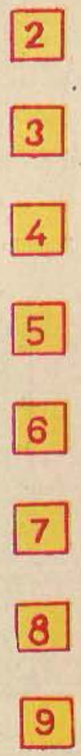


Fig. 155 (A.

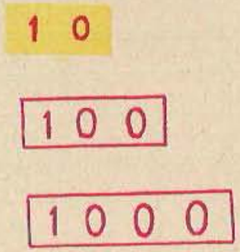


Fig. 155 (B

sucedía con los primeros carteles presentados ; esto es, se pueden componer grandes números superponiendo carteles.

Esto es el material bancario.

Existe, además, un material para indicar el multiplicando y el multiplicador.

Para el multiplicando existe un material semejante al bancario, pero, que llega solamente a 9.000. Es de un color distinto y con él se compone el multiplicando dado.

Para el multiplicador, en cambio, existen los siguientes materiales : 1º cuatro carteles de color distinto uno de otro que, con las dimensiones correspondientes, llevan marcados 1, 10, 100, 1000.

Hay, además, cuatro series de carteles que llevan marcadas, cada una, la serie de los números del 2 al 9 del mismo color, que los cuatro carteles antedichos (del 1, 10, 100 y 1000) de modo que se puedan formar números de decenas, centenas, millares, superponiendo al 1 de aquellos, estos otros carteles que llevan marcada la serie natural de los números (fig. 155).

Los números se forman cubriendo la unidad.

Así se pueden formar las decenas sucesivas : 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Análogamente para las centenas, queriendo representar 700 se cubre la unidad del cartel 100 con un cartel del 7 del mismo color que el 100, (fig. 156).

Fig. 156

Si se quiere después representar un número, todo de cifras positivas, precisa practicar una pequeña construcción de superposiciones : por ejemplo, 346.

Las superposiciones son primeramente 300, después 40 y, por último 346, donde cada cifra está en un cartel o pequeño cuadrado de diverso color (fig. 157).

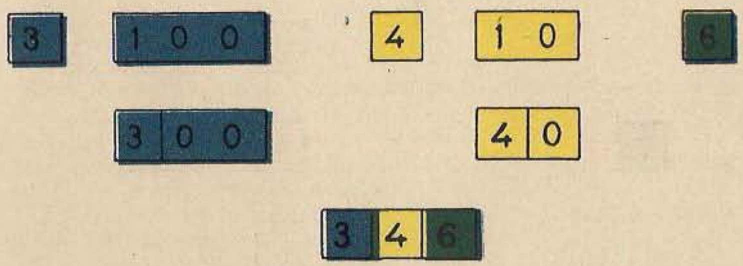


Fig. 157

Dados los números, multiplicando y multiplicador, el niño que actúa de registrador los anota y el que efectúa la multiplicación los compone con los carteles adecuados. Por ejemplo : 4347 × 285.

Fig. 158

Todos los otros carteles, relativos a la composición de los multiplicandos y multiplicadores, están encerrados en una caja, alejados del campo de la operación.

La primera labor es la de descomponer los números separando los carteles (fig. 159).

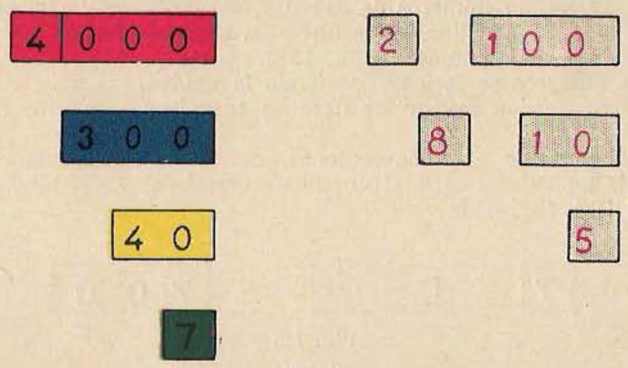


Fig. 159

Después se comienza la multiplicación.

Todos los grupos componentes del multiplicador deben ser multiplicados por cada uno de los grupos del multiplicando.

Se ponen éstos, pues, a un lado y se comienza a trabajar con las unidades del multiplicando (fig. 160), aún cuando se podría comenzar por cualquiera de los grupos.

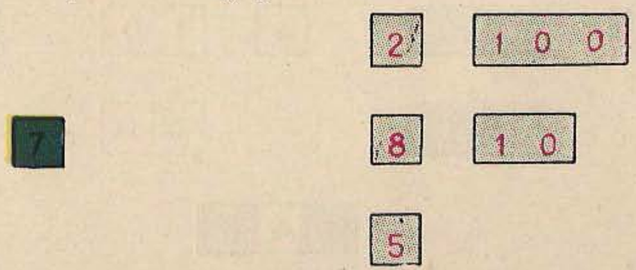


Fig. 160

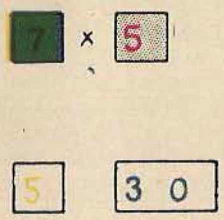


Fig. 161

Se aproximan primero las unidades (fig. 161) ; 7 × 5 = 35.

Ahora se pide al banquero la cantidad de 35 y él la toma del correspondiente material bancario.

Estos carteles se guardan en una gran caja : el *acumulador*, donde el banquero guarda, de vez en vez, los carteles relativos a la ejecución de la multiplicación, mezclándolos todos confusamente. Después, se conitnúa operando

Ahora el 7 del multiplicando debe ser multiplicado por las ocho decenas del multiplicador (fig. 162).

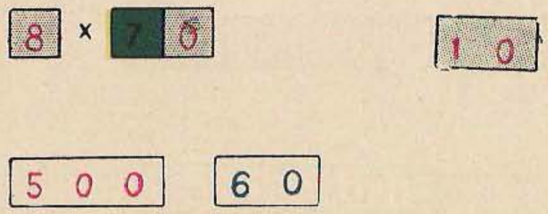


Fig. 162

El 7 del multiplicando permanece en el centro, a su derecha se pone el 10 cubriendo la unidad del 10, con el 7 y el 8 del multiplicador al otro lado, resultando el producto 8 × 70 u 8 × 7 = 56 decenas, esto es : 560. Ahora el banquero debe entregar 560 que se guardan en la caja del acumulador.

El 7 × 200 se obtiene : colocando el 7 en el centro y haciendo resbalar después bajo el 7 la primera cifra del 100.

El producto es 2 × 700 = 2 × 7 centenas o sea 1400.

Y el banquero entrega un billete de 1000 y uno de 400 (fig. 163).

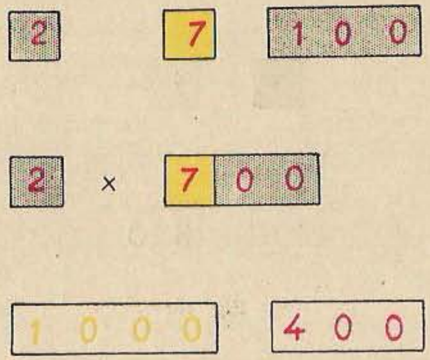


Fig. 163

Cuando el multiplicando es una decena, una centena, etc., la unidad del multiplicador se coloca bajo el último cero del multiplicando. Por ejemplo : 2 × 400.000 = 800.000 (fig. 164).

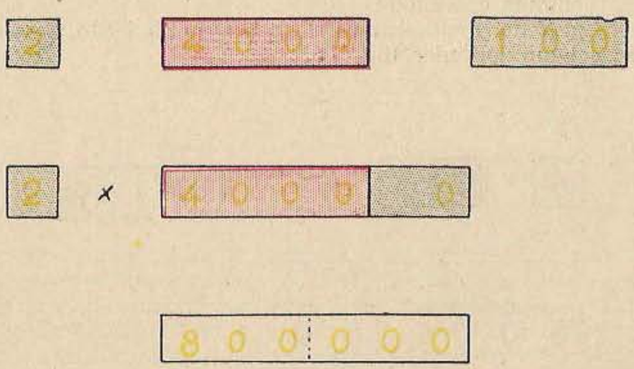


Fig. 164

800.000, pues, es la suma que el banquero debe entregar y que va al acumulador.

Puede suceder que en el banco no queden ya los valores pedidos porque hayan pasado todos los de esa clase al acumulador. Entonces se sacan del acumulador haciendo los cambios oportunos con el banco, en forma que los valores debidos entren en el acumulador. Los cambios entre éste y el banco, no los hace con frecuencia el banquero, sino un tercer niño dedicado a la comprobación y al registro, o también, un cuarto niño si el registrador está ya ocupado en su función.

De este modo el operador, el banquero, el registrador, y el niño que comprueba, trabajan hasta el fin.

El registrador vigila el multiplicando y el multiplicador, quitándolos de la circulación cuando han funcionado.

El trabajo último se reparte ahora entre el operador y el banquero, principalmente, pero, también el niño que comprueba debe vigilar atentamente, para que no haya errores, e interviene en caso de necesidad.

Se vacía la caja del acumulador y se buscan los billetes de igual valor, cambiándolos, de vez en vez, por billetes mayores que representan su suma, porque de todos los que se han acumulado debe quedar solamente un billete por cada jerarquía de número y estos billetes, efectuadas las correspondientes superposiciones, dan el producto final en un solo número.

En la operación que venimos efectuando deben quedar al final únicamente, los siguientes carteles (fig. 165) que superpuestos dan el total 4347 × 285 = 1.238.895 (fig. 166).

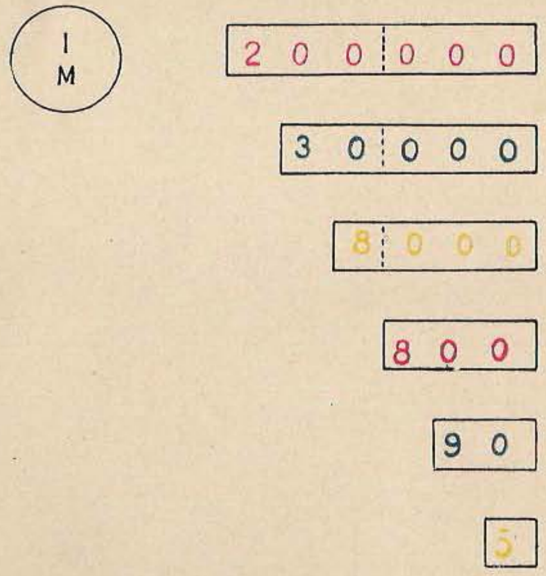


Fig. 165

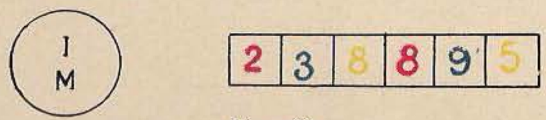


Fig. 166

ALGEBRA

ALGEBRA

RETORNOS REMOTOS

Volver al material de la primera infancia y usarlo aún ; he aquí un retroceso que debe significar reposo mental.

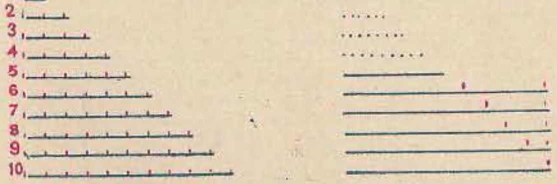
Las tres series de los bloques, la torrecilla roja, los prismas y los bastones largos con las divisiones azules y rojas que distinguen las unidades, esto es, la longitud del bastón más corto. Y además de esto, el alfabeto con sus pequeñas letras de papel de color.

La torrecilla roja ha tenido ya una evolución brillante, esto es, aquella magnífica torre de perlas de diez colores, que contiene el secreto de los números.

Aquí, sin embargo, queremos retroceder, precisamente al estado inicial y repetir los mismos ejercicios que realizaban los niños de cuatro años de edad.

EJERCICIOS CON LOS BASTONES LARGOS

Se disponía entonces de bastones de gradual longitud, uno junto a otro, de modo que todos comenzasen en el mismo nivel precisamente, para poner de relieve la dimensión comparativa, y después, con un trabajo regular, se colocaba el más corto junto al penúltimo que tenía 9 veces lo longitud de aquél ; a continuación el bastón del 2 adyacente al del 2, etc. ; de este modo se formaban todos los bastones ; 10.

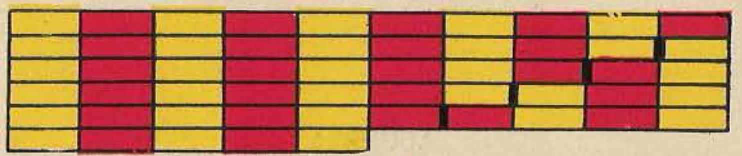


$5 = 5$
$6 + 4 = 10$
$7 + 3 = 10$
$8 + 2 = 10$
$9 + 1 = 10$
$10 \quad = 10$

Fig. 167

Unicamente el bastón del 5 quedaba solo, significando la mitad de 10.

Se constituían de aquel modo cinco bastones de 10 y uno de 5, y el recuento de todas las unidades, contenidas en el sistema, quedaba muy facilitado por semejante disposición, convirtiéndose en una multiplicación de $5 \times 10 = 50$ y una suma de $50 + 5 = 55$.



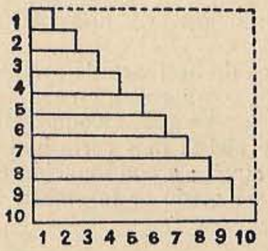
$$\begin{array}{l|l} 10 = 10 & \\ 9+1=10 & 10 \times 5 \\ 8+2=10 & \\ 7+3=10 & + \\ 5 = 5 & 5 \end{array}$$

55

Fig. 168

Se puede representar esto, mediante un dibujo en papel cuadriculado, colocando en filas sucesivas un cuadrado, una fila de dos cuadrados y así, sucesivamente, hasta 10.

Siendo 10 por los dos lados, siendo 10 las filas superpuestas y 10 los pequeños cuadrados cubiertos por la base, se puede construir un cuadrado, es decir, una figura geométrica, como indica la figura que representa 10^2.



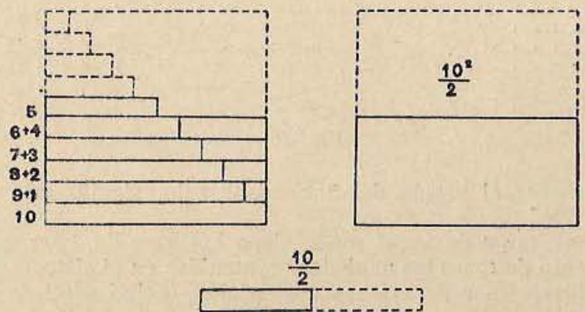


Fig. 169

Disponiendo después el 1 junto al 9, el 2 junto al 8, etc., se logra llenar medio cuadrado, habiéndose formado cinco filas de 10 superpuestas una sobre otra, $\frac{10^2}{2}$, y queda todavía media fila, 5 o sea $\frac{10}{2}$

Por esto, considerando el número mayor a que llega la serie 10, se obtiene, que el total de la suma de la serie natural de los números de 1 a 10 es igual a la mitad del cuadrado de 10 más la mitad de 10.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10^2}{2} + \frac{10}{2} = \frac{10^2+10}{2}$$
$$= \frac{100+10}{2} = 55$$

Si reflexionamos sobre ello, comprenderemos que lo mismo sucedería si se fuera en la serie, más allá del 10, ya que se colocaría siempre el 1 junto a la cantidad penúltima, que difiere de la mayor en una unidad solamente, el 2 en la sucesiva, etc.

Veamos el dibujo del 16.

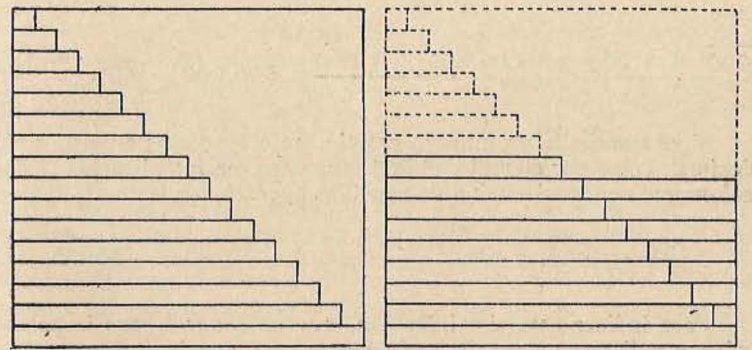


Fig. 170

en el que se agruparon las cantidades, en tal forma, que se obtiene $\frac{16^2}{2} + \frac{16}{2}$

De donde

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16$$
$$= \frac{16^2+16}{2} = \frac{256+16}{2} = \frac{272}{2} = 136$$

Lo cual resulta mucho más sencillo, que realizar la suma de un número tras el otro. Véase, pues, cómo la disposición geométrica ha facilitado el cálculo.

En efecto, si se hubieran de sumar los números del 1 al 100, es aún más evidente la simplificación, pues, para realizar la suma siguiente

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100$$

basta realizar este simple cálculo, más facilitado aún por el sistema decimal

$$\frac{100^2 + 100}{2} = \frac{10.000 + 100}{2} = 5.000 + 50 = 5.050$$

Y si se tratase de una serie que debiera llegar a un número mucho mayor, como por ejemplo 1.000, el cálculo sería siempre sencillo

$$\frac{1.000^2 + 1.000}{2} = \frac{1.000.000 + 1.000}{2} = 500.000 + 500 = 500500$$

Si se tratase de un número grande, pero no consistente en unidad decimal, como por ejemplo, el 854, entonces, se complicaría el cálculo solamente con la ejecución de sencillas operaciones

$$\frac{854^2 + 854}{2} = \frac{729316 + 854}{2} = \frac{730170}{2} = 365085$$

Para indicar esta simplificación, que es general para la suma de números dispuestos en la serie natural, se puede indicar con una letra *n* (número) el último al cual llega la serie y con esta fórmula ·

$$1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n^2+n}{2}$$

Si se quiere que el niño llegue con entusiasmo a una fórmula algebraica, no precisa explicarla ni atraer su atención sobre ella, al contrario, conviene no insistir.

Lo que precisa, en cambio, es repetir aquel mismo ejercicio que ocupa tanto tiempo al niño de cuatro años con el desplazamiento de

los bastones largos, o sea, repetir agrupamientos que forman todos ellos cantidades iguales a la mayor, y hacer las comprobaciones relativas. Repetir esto con dibujos, con cintas, o bastones construídos como un trabajo manual, etc. Y es así cómo, de repente, la idea se hace tangible y la fórmula que la expresa, no sólo interesante, sino necesaria, como es necesario el lenguaje para expresar las ideas.

Verdaderamente el álgebra, que utiliza el alfabeto, es, con sus fórmulas, un lenguaje de ideas matemáticas y apenas se conoce su significado, viene la tendencia a buscar entre los ejercicios ya realizados, alguna idea más que pueda expresarse mediante fórmulas algebraicas.

CUADRADOS

Pero quedémonos en un nivel más elemental : esto es : la multiplicación con los bastoncillos de perlas.

Repetir tres veces la cantidad representada por bastoncillos de perlas 6 + 4 + 9 quiere decir : repetir tres veces 6, después 3 veces 2 y por fin 3 veces 9. Pero esto sucedería con cualquier bastoncillo ; lo mismo es que en vez de 6, 4, 9 se hubieran escogido 2, 8 y 5. O si en vez de repetirlos tres veces, se hubieran repetido ocho veces.

Por lo tanto, hay un hecho que se debe expresar, el cual es independiente de las cantidades mismas.

He aquí el alfabeto que nos ayuda y los paréntesis que entran en juego.

$$a\ (b + c + d) = ab + ac + ad$$

Veamos ahora otro ejercicio. Yo repito tres veces los mismos bastones, 6, 4, 9. Después quiero añadir aún dos veces el grupo 6, 3, 9. En ese caso he repetido la misma cantidad primero 3 y, después, 2 veces.

El 5 se convierte en 3 + 2, los grupos son 6.

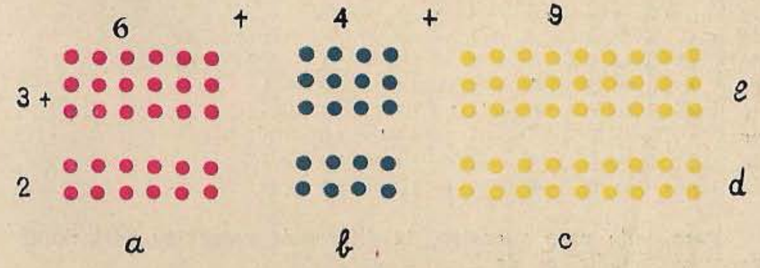


Fig. 171

La operación con cifras, en este caso se expresa así :

$$(3+2)\ (6+4+9)=3\ (6+4+9)+2\ (6+4+9) = 3.6+3.4+3.9+(2.6+2.4+2.9)$$

Y en el caso general, con las letras del alfabeto :

$$(e + d)\ (a + b + c) = ea + eb + ec + da + db + dc$$

Otro ejercicio muy interesante consiste, en tomar los pequeños cuadrados de perlas, que representan los cuadrados numéricos de 1 a 10, y ver cuantas perlas hay que añadir y cómo deben colocarse.

Por ejemplo : tengo el cuadrado de 4 y deseo obtener el de 5.

Debo colocar dos filas de 4 en dos lados adyacentes y después una perla en el hueco que queda.

Lo mismo sucede en la figura 173, donde se pasa del cuadrado de 6 al de 7 ; dos filas de 6 a los dos lados y una perla en el ángulo. Así en todos los casos análogos.

de 4^2 a 5^2 de 6^2 a 7^2

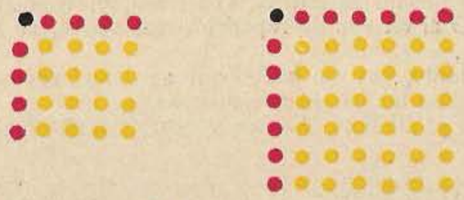


Fig. 172

Los niños, con la característica de su trabajo espontáneo, que es ordenado y paciente, siguen, por entero y ordenadamente, el paso de uno a otro cuadrado.

Las cantidades de perlas necesarias para los pasos, son :

de 2 a 3 = 2 + 2 + 1 = 5 = 5.
de 3 a 4 = 3 + 3 + 1 = 7 = 7.
de 4 a 5 = 4 + 4 + 1 = 9 = 9.
de 5 a 6 = 5 + 5 + 1 = 11 = 10 + 1.
de 6 a 7 = 6 + 6 + 1 = 13 = 10 + 3.
de 7 a 8 = 7 + 7 + 1 = 15 = 10 + 5.
de 8 a 9 = 8 + 8 + 1 = 17 = 10 + 7.
de 9 a 10 = 9 + 9 + 1 = 19 = 10 + 9.

Para cada paso sucesivo, la diferencia entre las perlas que es necesario añadir, es de 2.

Veamos ahora el modo de efectuar el paso a saltos. Por ejemplo, de 5 a 7.

de 5^2 a 7^2

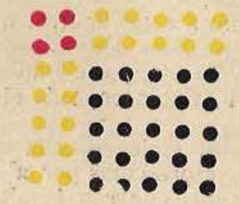


Fig. 173

Aquí precisa añadir dos filas de 5 en cada lado, y el espacio que queda vacío rellenarlo con un pequeño cuadrado de 2.

El cuadrado total obtenido contiene los cuadrados de las dos partes en que fué separado el 7 ; 5^2 y 2^2 que se encuentran a lo largo de la diagonal. Y el espacio remanente, se llena con dos disposiciones rectangulares de perlas, correspondientes a los productos de las dos partes entre sí : 5×2.

Otro ejercicio que se puede emprender nuevamente para estudiar la colocación de las partes en un cuadrado subdividido, es el relativo a las multiplicaciones efectuadas en los cuadrados de puntos.

Aquí pueden emprenderse de nuevo los trabajos manuales con papel de color o los dibujos.

Comencemos por lo más sencillo, o sea, por el lado del cuadrado dividido en dos partes solamente.

Tres cuadrados de papel de diverso color cada uno se recortan, de modo, que con ellos se pueda reconstruir un cuadrado a tres colores, como en la figura 174.

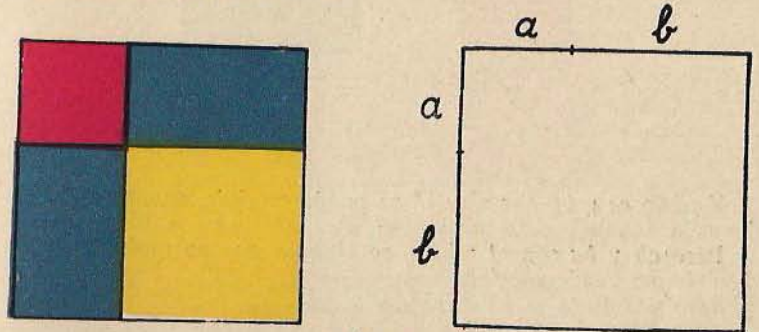


Fig 174

El cuadrado así construído resulta compuesto por cuatro figuras. dos cuadrados y dos rectángulos.

El rectángulo tiene un lado igual a uno de los cuadrados y el otro, igual al del otro cuadrado.

No pudiendo dar un número a estas figuras, que no ofrecen puntos que se puedan contar en medidas determinadas de lados, podremos indicarlos con una letra y llamar, por ejemplo, las dos partes del lado del cuadrado mayor a y b. Entonces, todo el cuadrado se puede indicar así: $(a + b)^2$

Los dos cuadrados internos, teniendo cada uno como lado una de las partes *a*, *b*, se puede representar por a^2 el uno y por b^2 el otro. En cambio. los rectángulos que son iguales y se pueden superponer, representan la combinación de las dos partes del lado y se pueden indicar por *ab*.

El cuadrado entero, es igual a la suma de ambas partes $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Si ahora queremos, en vez de representar simplemente la figura, realizar con estas letras una operación semejante a la que practicamos con los números, se podría indicar así la operación: $(a + b)(a + b)$ donde una $a + b$ es el multiplicando y el otro el multiplicador.

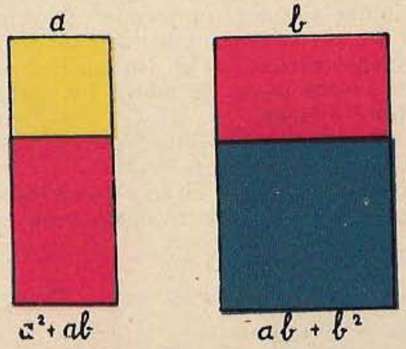


Fig. 175

Y como *aa* y *bb* son a^2 y b^2 se puede escribir, sustituyendo estos signos a aquellas combinaciones: $a^2 + ab + ba + b^2$.

Pero *ab* y *ba* son el mismo rectángulo que se repite 2 veces y *ab* + *ba* se puede escribir 2 ab.

Por lo tanto $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

$$(a+b)(a+b)=$$
$$(a+b)a+(a+b)b=$$
$$a \cdot a+b \cdot a+a \cdot b+bb=$$
$$=a^2+ba+ab+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

Fig. 176

Ahora bien. Aquel (a + b) se llama binomio (que quiere decir dos números) e indica las partes en que se halla dividida la línea entera; las dos partes forman un solo todo, el lado, y por ello, se encierran dentro de un paréntesis.

He aquí un cuadrado con el lado dividido en tres partes.

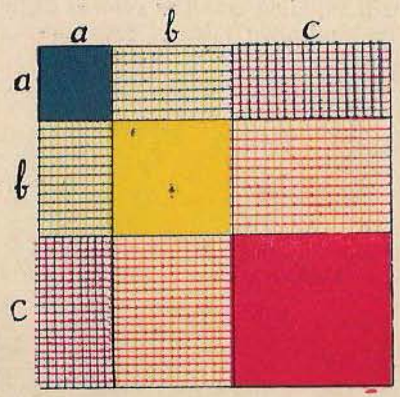


Fig. 177

El dibujo hace evidente la disposición de las figuras; los cuadrados a lo largo de la diagonal y los rectángulos iguales que se hallan simétricamente colocados. También aquí, no habiendo puntos que contar, sino figuras por ver, se podrían llamar genéricamente a, b, c, las tres partes en que se halla dividido el lado e indicar los tres cuadrados así : a^2, b^2, c^2 mientras los rectángulos, se podrían indicar según las combinaciones de sus lados.

ab ...... ac en la primera línea superior.
ba ...... bc en la línea siguiente.
ca ...... cb en la tercera.

Así, las tres series superpuestas de figuras se pueden indicar del modo siguiente :

1.° = línea superior : $a^2 + ab + ac$.
2.° = línea media : $ba + b^2 + bc$.
3.° = línea inferior : $ca + cb + c^2$.

Todo este conjunto forma el cuadrado que tiene como lado $a + b + c$. Esto es $(a + b + c)(a + b + c)$.

Por lo tanto, siguiendo las normas establecidas con los números, tendremos :

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b+c) = {} & a^2+ab+ac+ \\ & ba+b^2+bc+ \\ & ca+cb+c^2\end{aligned}$$

Lo que resalta más, si se emplean colores distintos para las letras que indiquen el multiplicando y el multiplicador.

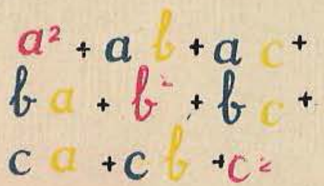


Fig. 178

Ahora, todas estas agrupaciones de letras se pueden ordenar mejor ; colocando primero en fila todos los cuadrados, y después, reuniendo grupos iguales, con la indicación de que están repetidas dos veces, puesto que en la multiplicación, el orden de factores no altera el producto.

Y el producto, que indica la superficie de todo el cuadrado, queda simplificado así :

$$(a+b+c)(a+b+c) = a^2+b^2+c^2 + 2\,ab+2\,ac+2\,bc$$

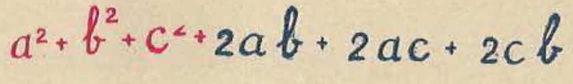


Fig. 179

Los tres términos que constituyen uno solo, como $(a + b + c)$, que representan juntos al lado de un cuadrado, se llama *trinomio* y los tres se encierran dentro de un paréntesis. Si los términos son cuatro, por ejemplo $(a + b + c + d)$ se llama *cuatrinomio*. Si son 5, $(a + b + c + d + e)$, *pentanomio*, etc.

Hagamos el dibujo de un cuatrinomio, donde los términos estén expresados numéricamente, como en la fig. 180.

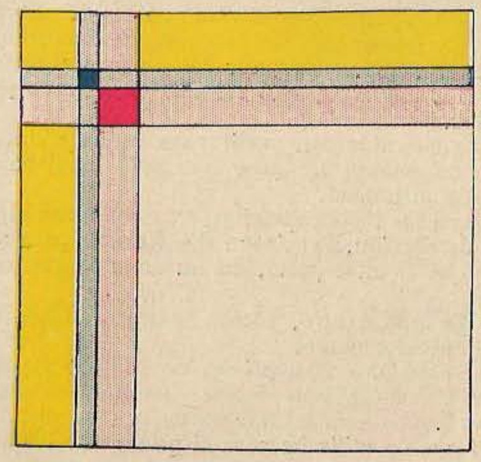


Fig. 180

Los primeros números son pequeños y, por ello, aparecen indicados por líneas breves, el último, en cambio, es más grande y la figura toma el aspecto de ornamento de un ángulo.

Este ornamento de ángulo es el dibujo de un cuatrinomio : $3 + 1 + 2 + 7$.

Aquí el papel cuadriculado sustituye, con los cuadrados, los puntos y permite el cálculo numérico de todas las figuras componentes. Sería $4 \times 4 = 16$.

PRISMAS

Volvamos a la serie de bloques usados en la «Casa de los Niños»

Sería interesante poder construir los bloques por medio de listones todos iguales al prisma más pequeño, que tiene un centímetro de lado en el cuadrado de sección.

En los otros prismas, el lado del cuadrado de sección, crece sucesivamente un centímetro hasta 10.

Se ha preparado un material, que permite efectuar estos pasos. Primero, se usaban bastoncillos separados, pero la práctica, hizo necesario el unirlos, constituyendo, una especie de tablitas correspondientes a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bastoncillos o listones. Estas uniones consisten en tablitas, donde la separación de los listones está dibujada, y permite el contarlos. También los prismas están dibujados, lo mismo en las caras rectangulares, que en las caras de secciones.

Es decir, que los prismas tienen las señales de un «análisis» que permite evaluar el número de unidades que los constituyen.

Se ve, entonces, que, para pasar del *primero* al *segundo* prisma, precisa añadir tres unidades, esto es, que el segundo prisma consta de 4 bastoncillos.

Habiéndolo construído así, sustituye a este conjunto el segundo prisma, hecho de una pieza, pero que está dibujado en su parte externa indicando la unidad.

A éste se unen los listones sueltos, que conducen al prisma de 3, con cuadrados de sección. Precisan : dos listones para un lado y dos para el otro y queda un espacio, en un ángulo, que se rellena con un bastoncillo.

Para pasar de uno a otro, fueron precisos 5 bastoncillos o sea unidades y así sucesivamente.

Finalmente, para pasar del prisma de 9 al de 10 se han debido cubrir dos caras con nueve bastoncillos y ha quedado el espacio hueco de siempre correspondiente a uno ; es decir, que el número de unidades, igual al que se utilizaba para el paso entre los sucesivos cuadrados de perlas.

Es decir, que las diferencias de los prismas corresponden a las diferencias de los cuadrados ; aquel lado que en todos tiene la misma longitud no arrastra variación alguna al cálculo. Aún cuando alcanzase 20 metros de longitud, no tendría influencia alguna en los cálculos de las relaciones entre los prismas.

En el paso de los listones largos para pasar del listón de 9 al de 10 bastaba añadir una unidad.

En los prismas que varían según los cuadrados precisan en cambio 19 unidades para pasar del penúltimo al último.

Si después se confrontan los dos extremos de la serie se encuen-

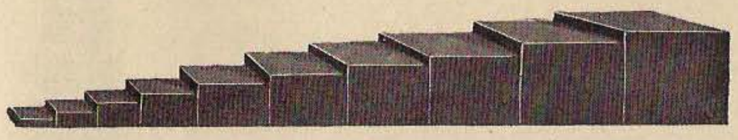


Fig. 181

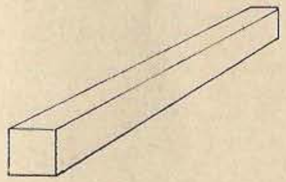


Fig. 182

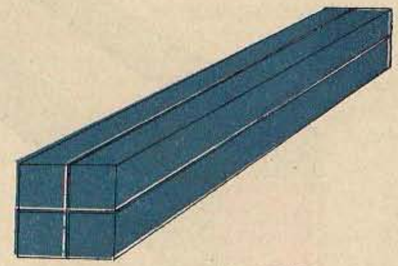


Fig. 183

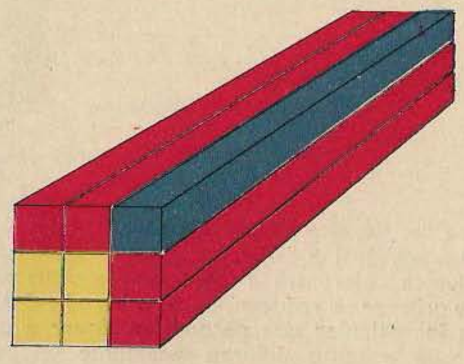


Fig. 184

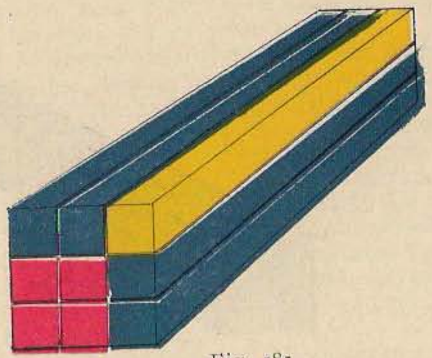


Fig. 185

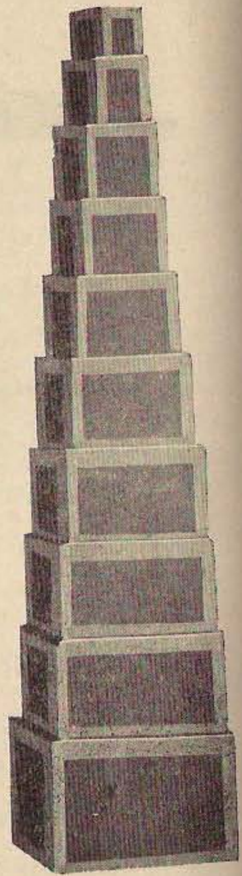


Fig. 186

tra que para los listones largos se va de 1 a 10 y para los prismas de 1 a 100 o sea de 1 a 10^2.

Los cálculos referentes a las relativas dimensiones de la serie graduada de prismas se reducen, pues, a los cálculos de sus secciones, es decir, a los cálculos que se podrían llevar a cabo sobre figuras planas, porque aquellos difieren solamente en sus secciones respectivas.

CUBOS

Estudiando análogamente los pasos de cubo a cubo en la torre roja, se presenta el problema de encontrar cuantos pequeños cubos, que son iguales al primero o sea al más pequeño, precisan para pasar de un cubo a otro y como hay que disponerlos para completar un cubo más grande.

A tal fin, hemos hecho construir muchos cubos pequeños que tienen un centímetro de arista. Pero, siendo difícil la construcción exacta con tales medios, porque caían los pequeños cubos y con la superposición concluían, sumados muchos, por superar los límites debidos, hemos hecho construir tablillas cuadradas representando el conjunto de pequeños cubos que serían necesarios para cubrir las caras de los cubos grandes. Además, sobre los mismos cubos hemos dibujado las subdivisiones relativas a las unidades que los componen.

Con tal material se puede fácilmente pasar de un cubo al sucesivo en toda la serie de 1^3 a 10^3 (Fig. 186).

Para pasar del primer 1^3 al segundo 2^3 es preciso, ante todo, proceder como se procedió con los cuadrados

Uno de un lado, uno del otro lado, y uno para rellenar el espacio que dejaron estos dos.

Después hay que doblar el cuadrado de dos así obtenido y se precisan 8 pequeños cubos para formar el cubo de 2 y, por lo tanto, para pasar del 1 al 2.

Para construir el cubo de 3, precisa cubrir 3 caras adyacentes con tres cuadrados de 2. Quedan, entonces, tres espacios entre estas caras y precisan tres listones de tres para rellenarlos. Después queda aún, en el punto en que éstos debieran encontrarse, un espacio que se rellena con un pequeño cubo.

Han sido, pues, necesarios:

Tres cuadrados pequeños de dos	$= 3 \times 2^2 = 3 \times 4 =$	12
más tres listones de dos	$= 3 \times 2 =$	6
más un pequeño cubo		1
		19

esto es, 19, pequeños cubos.

Sustituyendo ahora el cubo entero de 3, para pasar al de 4 se presenta la misma construcción

$$\begin{array}{lr} 3\ (3^2 \times 1) = 3 \times 9 = & 27\ + \\ 3\ (1^2 \times 3) & 9 \\ 1^3 & 1 \\ \hline & 37 \end{array}$$

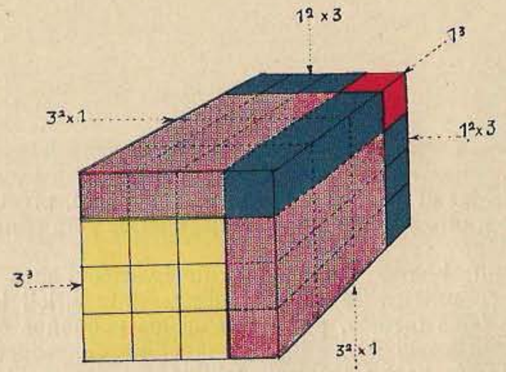


Fig. 187

Son, pues, necesarios 37 pequeños cubos.

Veamos ahora cuántos se precisan para pasar de 9 a 10. Con disposición análoga, resulta :

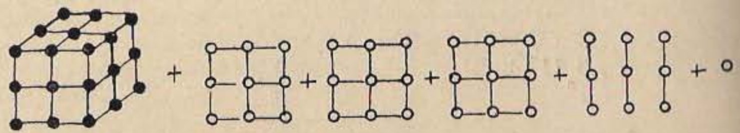
$$
\begin{array}{lcl}
3 \times 9^2 \times 1 & = 3 \times 81 = & 243 \\
3 \times 9 \times 1^2 = & = & 27 \\
1^3 \quad = & = & 1 \\
\hline
 & & 271
\end{array}
$$

Para pasar, pues, del cubo de 9 al de 10, son necesarias 271 unidades, mientras para pasar del prisma de nueve al de 10 bastaban 19.

Estos ejercicios pueden ser repetidos—aritméticamente—usando el material de perlas relativo al cuadrado y al cubo de los números de 2 a 10.

En efecto, pasando (por ejemplos), del cubo de 3 al de 4, se pueden añadir al cubito de 3, los tres cuadrados de perlas (3^2), y después, tres bastoncitos de perlas, y, en fin, 1 perla. Así se puede calcular contando unidad por unidad el pasaje descrito :

$$3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1 = 27 + 27 + 9 + 1 = 64 = 4^3$$



También para los cubos, se pueden realizar pasos salteados, por ejemplo, de 4 a 6.

Sobre cada una de las tres caras adyacentes del cubo de 4 se ponen dos prismas $4^2 \times 1$ y quedan entonces, a lo largo de las aristas, espacios que hay que llenar con 3 listones en cada lado formados de 4 prismas $2^2 \times 1$ y en el punto de su encuentro queda un espacio que se rellena con un pequeño cubo de 2 de arista.

He aquí, pues, lo añadido

$$
\begin{array}{l}
3 \times (2 \times 4^2) = 3\ (2 \times 16) = 3 \times 32 = 96 \\
3 \times (4 \times 2^2) = 3\ (4 \times \ \ 4) = 3 \times 16 = 48 \\
2^3 = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 \qquad\qquad\qquad\ \ = \ \ 8 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 152
\end{array}
$$

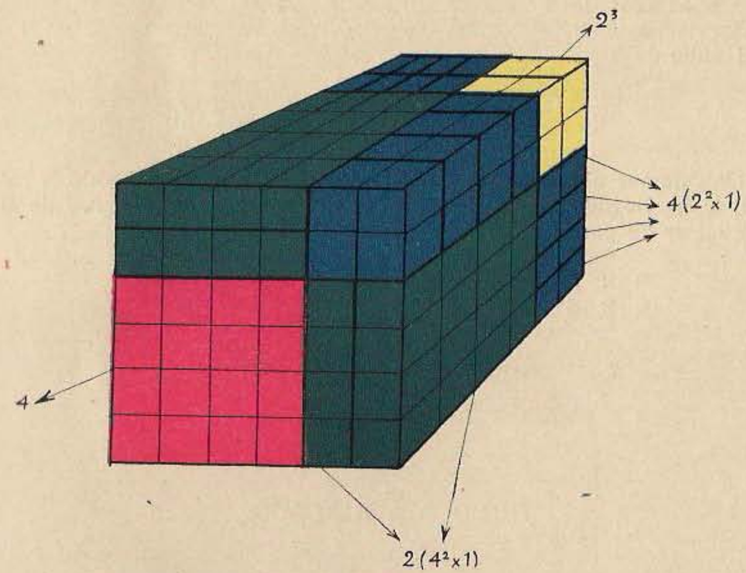


Fig. 188

Veamos con números

$$
\begin{array}{l}
4^3 = 4 \times 4^2 = 4 \times 16 = \ \ 64 \\
6^3 = 6 \times 6^2 = 6 \times 35 = 216
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{Ahora bien} & 216 \\
 & -\ 64 \\
\hline
 & 152
\end{array}
$$

La diferencia entre ambos cubos es, precisamente, 152.

Otro ejemplo de paso salteado; pasar del cubo de 6 al cubo de 8.

Sobre tres caras adyacentes se colocan dos prismas de $6^2 \times 1$, en total 6 prismas de 6×1 (cuadrados de 6). Quedan a lo largo de las aristas espacios que corresponden a un prisma largo de 6 que tiene como sección un cuadrado de 2.

$2^2 \times 6$.

Finalmente, en el ángulo en que convergen las partes añadidas, queda un espacio al que corresponde un cubo de 2.

Las partes añadidas son, pues:

6 cuadrados de 6	$6 \times 36 =$	216
3 prismas 6×2^3	$3 \times 24 =$	72
1 cubo de 2	$=$	8
		296

Calculemos ahora la diferencia numérica entre el cubo de 8, al cual se ha llegado con la adición calculada arriba, y el cubo de 6 del cual se ha partido.

$$\begin{array}{r} 8 \times 8^2 = 8 \times 64 = 512 \\ 6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216 \\ \hline 296 \end{array}$$

CUBO DEL BINOMIO

La disposición resultante de las partes del cubo así construído y la parte constante que se repite en cada caso, conduce a fórmulas generales que se pueden representar con los símbolos genéricos del alfabeto.

Así se ve que el cubo de 8, resultado de $(6 + 2)^3$, está construído con los cubos de las dos partes 6^3 y 2^3.

Además, hay tres prismas que resultan de los dobles cuadrados, colocados sobre las tres caras adyacentes—éstos resultan del cuadrado de 6 repetido dos veces—es decir $6^2 \times 2$.

Y se precisan, además, otros tres prismas que tienen como sección 2^2 y como longitud 6, es decir $2^2 \times 6$.

El conjunto, pues, consta de

$$\begin{array}{l} 6^3 + 2^3 + \\ 3\ (6^2 \times 2) + \\ 3\ (2^2 \times 6) \end{array}$$

Los prismas, pues, son de dos especies. uno tiene, por cara el cuadrado de la parte mayor y, por altura, la parte menor, y el otro, en cambio, tiene, por cara de la sección, el cuadrado de la parte menor y por altura, la parte mayor.

Esta distribución, se puede comprobar en todas las combinaciones posibles y es general. Se puede expresar mediante la fórmula

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$$

la cual desarrolla e indica la parte que constituyen el cubo de un binomio (fig. 189-190).

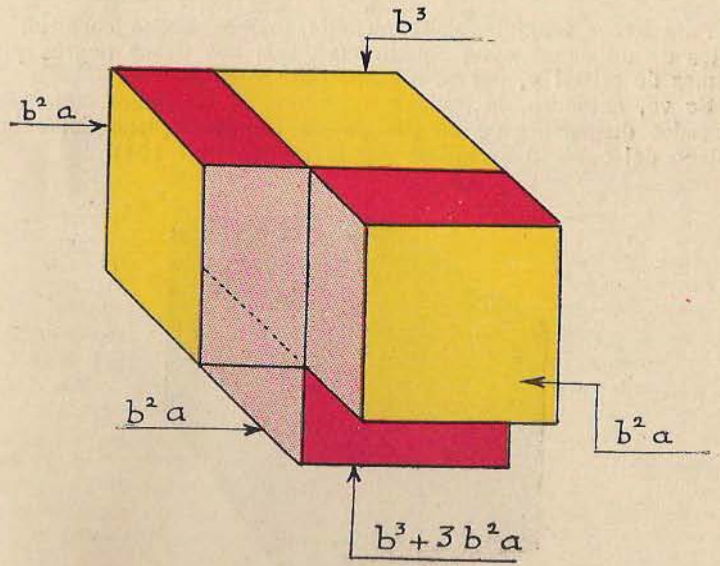


Fig. 189

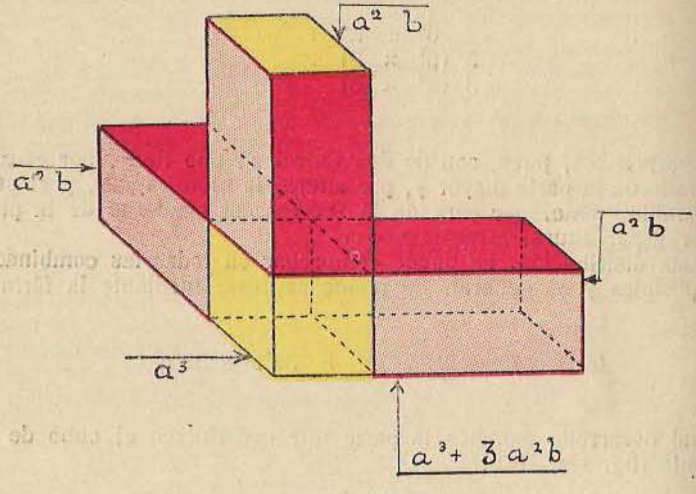


Fig. 190

Para hacer tangible dicha fórmula, hemos hecho construir las partes de un cubo según aquélla, que son dos cubos negros y los prismas de cristal y, por lo mismo, transparentes.

Se ve, entonces, la posición recíproca de los cubos, que están colocados diagonalmente en dos planos distintos (plano del cubo *a* y plano del cubo *b*) tocándose por el vértice (fig. 191).

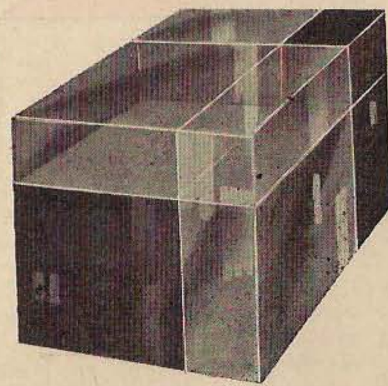


Fig. 191

Cada cubo está rodeado de tres lados de los tres prismas que son sus satélites, teniendo la misma sección cuadrada de dicho cubo y la altura, igual a la arista del otro cubo.

Observando las caras, son todas iguales, reproduciendo la figura del cuadrado de un binomio, donde se ven los cuadrados correspondientes a cada parte, colocados diagonalmente.

Colocando, pues, una luz eléctrica detrás del objeto, en una habitación a obscuras, resaltan las figuras negras de los dos cubos; mientras las aristas de los prismas de cristal, de uno y otro lado, proyectan sus sombras sobre un disco blanco, colocado para reflejarlas.

El ejercicio de componer o formar este resto con sus partes, es aún más sencillo y hacedero que construir la Torre Roja de los diez cubos. Llamando *a* y *b* las aristas de los dos cubos negros que intervienen en la construcción, se pueden interpretar los objetos según una indicación algebraica.

Se preparan carteles pequeños que indican, cada una de las partes componentes, por medio de la correspondiente fórmula algebraica (fig. 192); entonces, mezclados y tomados al azar, se va buscando el objeto correspondiente a cada uno y se pone junto a él, como hacían los niños de cuatro años con los primeros carteles

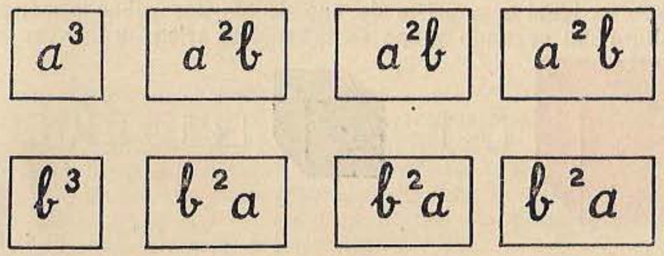


Fig. 192

de los números o con los bastones de la numeración. O también, a la inversa, se alinean (o se escogen al azar) los objetos y después, se busca para cada uno su correspondiente cartel algebraico. He oído a niños que habían combinado un ejercicio para dos. El uno tenía los carteles en su mano y decía al otro «dame b^2a» o también «dame b^3» pretendiendo, en esta forma, recibir un objeto; acaso recordaban la famosa lección de «los tres tiempos». Al escoger los prismas, aun cuando los niños reconozcan a primera vista la correspondencia con el cubo de su grupo, continuan durante largo tiempo superponiendo sus caras.

CUBO DEL TRINOMIO

El ejercicio ha suscitado tanto interés, que hemos pasado en seguida al cubo de un trinomio, preparando un material que conduce directamente a la fórmula algebraica corrrespondiente.

El material está compuesto en total de 27 objetos; esto es, tres cubos y 24 prismas.

La mayor parte de los prismas es de sección cuadrada y son iguales tres a tres. Existen, además, seis prismas iguales entre sí que no tienen ninguna sección cuadrada.

Los colores ayudan a distinguir los objetos en sus relaciones recíprocas y, al propio tiempo, conducen a la justa construcción del gran cubo que debe resultar del conjunto de los 27 objetos.

Los colores son tres y distinguen los tres pequeños cubos componentes ($a^3 + b^3 + c^3$). Por ejemplo, rojo a^3, azul b^3 y amarillo c^3.

Los prismas iguales tres a tres, se refieren a los pequeños cubos, cada cubo pequeño tiene como satélites suyos 2 grupos de 3 prismas, (en la figura hay representado un solo prisma de cada grupo) que tienen todos la misma sección cuadrada correspondiente a una cara del cubo pero la altura de cada uno de los 3 prismas de un grupo es igual a la arista de uno de los dos cubos remanentes, y la altura del segundo grupo es igual a la arista del tercer cubo.

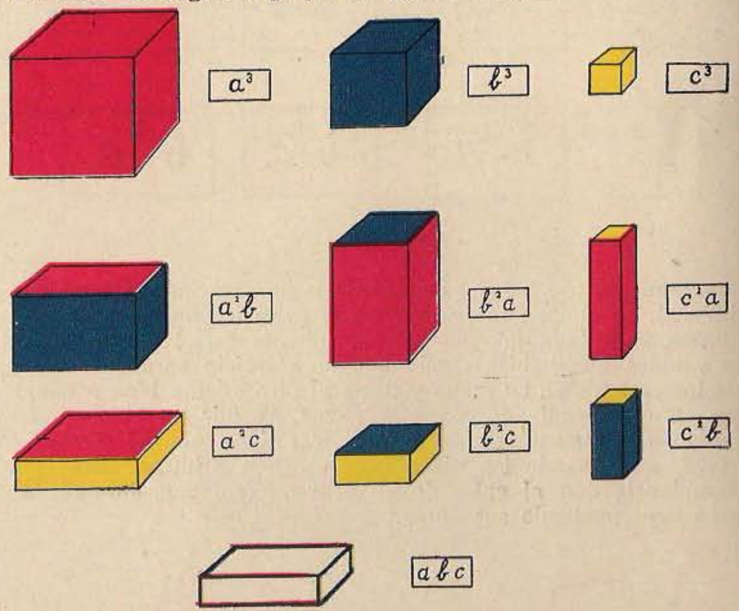


Fig. 193

a^3	b^3	c^3	a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
			a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
			a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
									abc
									abc
									abc

Fig. 194

1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
a^3	b^3	c^3	a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc

Fig. 195

Así, por ejemplo, respecto al cubo a^3—que es rojo—hay tres prismas con sección a^2 y por lo mismo roja como el cubo a^3, y de altura correspondiente a b (y por lo mismo con las caras laterales azules). En cambio, los otros tres prismas de sección a^2 teniendo la altura de c tienen las caras laterales amarillas como el cubo c^3.

Lo mismo sucede con las otras series de prismas de sección cuadrada que se refieren a los cubos b y c.

Finalmente, los seis prismas iguales entre sí, que no poseen ninguna cara cuadrada, pero que tienen tres aristas desiguales a, b y c, tienen las aristas, de tres colores distintos, iguales a los de los cubos correspondientes.

Es evidente, que los colores sólo tienen una importancia relativa en la construcción del cubo resultante: el cubo del trinomio.

Conjuntamente con dichos objetos, existen pequeños carteles con la fórmula que distingue cada uno de ellos (fig. 194); y los carteles con los números 1, 3 y 6 indican las repeticiones de las piezas a las cuales corresponden (fig. 195). Estos carteles son en justo número, de modo que puedan colocarse encima de cada uno de los objetos.

El primer ejercicio es el que se ejecuta con el material sólido, mezclando los 27 trozos relativos al cubo de un trinomio y buscando después los prismas iguales entre sí, para agruparlos según el propio criterio.

Un ejercicio sucesivo consiste, en conocer la relación de los prismas con los cubos, lo que se logra fácilmente, gracias a los colores y, de ese modo, se hace posible colocar sobre cada objeto el cartel correspondiente : por ejemplo, a^2 b, c^2 b o abc. etc.

Concluída esta labor se puede proceder a dos composiciones, una es la construcción del cubo del trimonio con los 27 objetos, colocando cada uno de ellos en el lugar correspondiente. La otra, es la disposición de los pequeños carteles que se pueden agrupar (sumándolos ordenadamente) colocando un número en vez de los carteles iguales (fig. 196).

Así

$$\boxed{a^2} + \boxed{b^2} + \boxed{c^2} +$$
$$+ \boxed{3}\ \boxed{a^2b} + \boxed{3}\ \boxed{b^2a} + \boxed{3}\ \boxed{c^2a} +$$
$$+ \boxed{3}\ \boxed{a^2c} + \boxed{3}\ \boxed{b^2c} + \boxed{3}\ \boxed{c^2b} +$$
$$+ \boxed{6}\ \boxed{abc}$$

Fig. 196

Lo que constituye la fórmula algebraica del cubo del trinomio.

La construcción del cubo, pone de relieve la posición recíproca de los tres cubos pequeños, los cuales atraviesan el cubo grande diagonalmente, del final de una arista al final de la opuesta, manteniendo contacto entre sí por el extremo de una de sus aristas respectivas y quedando situado en planos diversos : plano del cubo a, plano del cubo b y plano del cubo c. (fig. 197).

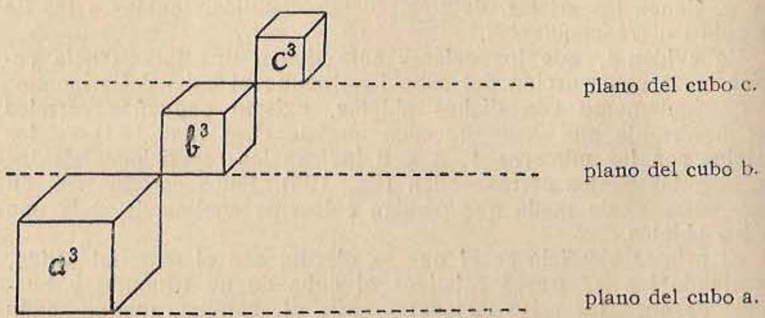


Fig. 197

RAIZ CUADRADA

RAIZ CUADRADA

Considerar el cuadrado de un número, es considerar una multiplicación con caracteres especiales; el número repetido por sí mismo.

N.	$N.^2$	$N.^3$
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

Tabla de los cuadrados y cubos de los números 1 a 10 para el cálculo de las raíces

10×10 es el cuadrado de 10. En el cuadrado del número, el número que se repite por sí mismo se llama raíz del cuadrado.
El lado del cuadrado corresponde a la raíz (fig. 198).

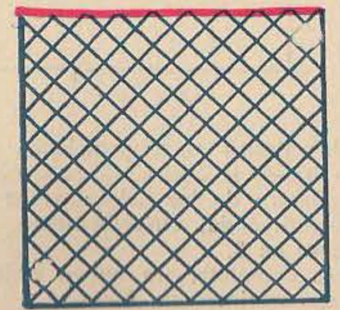


Fig. 198

Ahora hemos de efectuar una operación opuesta a la de averiguar el cuadrado. Esta operación opuesta consiste en hallar la raíz cuadrada de un número.

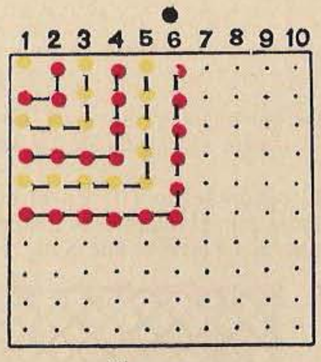
Dado el número 36 busquemos su raíz. Quien conserve en la memoria la tabla de multiplicar, encuentra en seguida que la raíz de 36 es 6, toda vez que $6 \times 6 = 36$.

Si, en cambio, el número cuya raíz quisiera averiguarse fuera 3, quien recuerde la tabla de multiplicación, comprenderá en seguida que en 38 hay un cuadrado 6×6—el cuadrado de 6—más un resto de 2 unidades.

$$38 = 36 + 2 = (6 \times 6) + 2$$

El signo para indicar la raíz cuadrada de un número es el siguiente : $\sqrt[2]{36} = 6$. $\sqrt[2]{38} = 6$ con un resto de 2.

Usemos ahora el material. Tomaremos la tabla que nos ha servido para los primeros estudios sobre la multiplicación. Teniendo al número 36 representado por 36 perlas separadas, procuraremos construir con ellas un cuadrado cada vez mayor ; de 1, de 2, de 3, de 4 etc., colocando las perlas angularmente, mientras tengamos perlas disponibles :



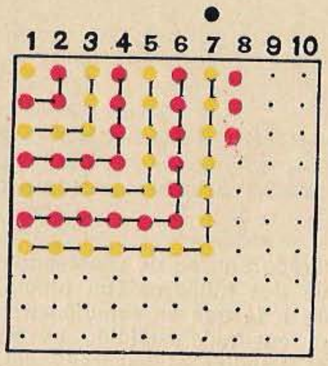
$\sqrt{36} = 6$

Fig. 199

Disponiendo las perlas en disposiciones semejantes sucesivas, se alcanza, como indica la figura, al cuadrado de 6. La raíz está indicada por el número de los colocados en la parte superior, al cual, se llega construyendo, sucesivamente, un cuadrado siempre mayor. En este caso es 6.

Si no se logra completar un nuevo cuadrado, la cantidad de perlas insuficiente, constituye un resto.

Repitamos ahora el ejercicio con 52 perlas.



$\sqrt{52} = 7$

con resto de 3

Fig. 200

Se llega con ellas ha construir el cuadrado de 7 ; $7 \times 7 = 49$ y quedan tres perlas como resto. Por lo tanto, la raíz cuadrada de 52 es 7, con un resto de 3. $\sqrt{52} = 7 +$ resto 3

Esta sencillísima operación puede repetirse muchas veces. No es una multiplicación ni una división y, aunque se trata de disponer unidades en forma semejante a como se hacía en las operaciones precedentes, aquí la disposición consiste en construir un cuadrado, con el fin de conocer su lado.

La operación se llama *extracción de raíces*.

RAICES DE MAS CIFRAS

EJERCICIOS PREPARATORIOS DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO

Si el lado del cuadrado en vez de representar un número único, representa la suma de dos números (un binomio) sobreviene una complicación semejante a la que se estudió en las pequeñas multiplicaciones dentro del cuadrado dividido en partes, y observada después en álgebra al estudiar el cuadrado del binomio, trinomio etc. Así, en la figura 201 se observan dentro del cuadrado pequeños cálculos de multiplicación que sumados nos dan el producto total $\sqrt{64} = 8$ elevado al cuadrado, esto es, $5 + 3$ elevado al cuadrado.

	5	+ 3	
5	5 × 5 = 25	3 × 5 = 15	25 + 15 × 15 + 9 =
+ 3	5 × 3 = 15	3 × 3 = 9	64

Fig. 201

Si aplicamos al cálculo una interpretación relativa al sistema decimal, y si a las partes en las cuales está dividido el lado del cuadrado se atribuyen diferentes valores jerárquicos, entonces se obtienen resultados muy distintos (Fig. 202).

	50	+ 3	
50	50 × 50 = 2500	3 × 50 = 150	2500 + 150 + 150 + 9 =
+ 3	50 × 3 = 150	3 × 3 = 9	2809

Fig. 202

El número, entonces, en vez de ser $5 + 3 = 8$ se convierte en $50 + 3 = 53$, y todos los cálculos interiores que se refieren a las partes que constituyen el cuadrado, forman conjuntamente un número que es el cuadrado de 53, $53^2 = 2.809$.

Un ejercicio atrayente, consiste, en confrontar un rectángulo subdividido en partes (esto es, constituído por dos lados, cada uno de los cuales representa la suma de partes determinadas) como, por ejemplo, el rectángulo $(4 + 6 + 2 + 3)(8 + 4 + 5)$, o sea 15×17 — calculado solamente en relación con el valor absoluto de los números— ; y calcular después el mismo rectángulo cuando sus partes se refieren a diversos valores jerárquicos.

En el primer caso, las distintas figuras representan los siguientes productos parciales :

$$\begin{array}{r} 32 + 48 + 16 + 24 = 120 \\ 16 + 24 + 8 + 12 = 60 \\ 20 + 30 + 10 + 15 = 75 \\ \hline 255 \end{array}$$

que en total dan el número 255.

	4	+ 6	+ 2	+ 3	
8	32	48	16	24	= 120
+ 4	16	24	8	12	= 60
+ 5	20	30	10	15	= 75
					= 255

Fig. 203

En el segundo los productos se forman entre los dos términos. $(4.000 + 600 + 20 + 3)(800 + 4 + 5)$ y son :

3.200.000	160.000	20.000
480.000	24.000	3.000
16.000	800	100
2.400	120	15
3.698.400	184.920	23.115

constituyendo su suma el número 3.906.435.

	800 +	40 +	5
4000 +	3.200.000	160.000	20.000
600	480.000	24.000	3.000
+ 20 +	16.000	800	100
3	2.400	120	15

3.698.400 + 184.920 + 23.115 = 3.906.435

Fig. 204

Dos rectángulos que tengan la misma superficie 15 × 17 pero con sus lados divididos en distinta forma, como, por ejemplo, en la figura 205.

		400 +	60 +	7
934.000	2000 +	800.000	120.000	14.000
+ 233.500	500 +	200.000	30.000	3.500
+ 18.680	40 +	16.000	2.400	280
+ 1.868	4 +	1.600	240	28
= 1.188.048				

Fig. 205

(2 + 5 + 4 + 4) (4 + 6 + 7) si se les calcula tomando como base los valores absolutos de los números, dan resultados iguales, esto es: 15 × 17 = 255.

Pero si los números asumen el valor relativo a su respectiva función jerárquica, los resultados son muy distintos; y, en efecto, las partes de los lados (4 + 6 + 2 + 3) (8 + 4 + 5) = 16 × 17 se convierte en cambio en 4.623 × 845 = (4.000 + 600 + 20 + 3) (800 + 40 + 5) = 3.906.435. Y en el otro rectángulo, también de 15 × 17, (2 + 5 + 4 + 4) (4 + 6 + 7) se convierte en 2.544 + 467 = (2.000 + 500 + 40 + 4) (400 + 60 + 7) = 1.188.048.

	800 +	40	+ 5
4000	20.000	160.000	3.200.000
600	3.000	24.000	480.000
20	100	800	16.000
3	15	120	2.400

23.115 + 184.920 + 3.698.400

= 3.906.435

Fig. 206

Todas estas comprobaciones resultan todavía más interesantes si se confrontan las sumas referentes a las figuras que se hallan sobre la misma línea horizontal (y representan la repetición de cada número del multiplicador por cada número del multiplicando) porque aquéllas se identifican con los productos parciales de la misma multiplicación llevada a cabo con el procedimiento aritmético. De ese modo estos ejercicios que se ofrecen como representación geométrica de un análisis minucioso del cálculo aritmético, se convierten por sí mismos en motivo de una nueva actividad.

Cuadrados. — Dichos ejercicios realizados con el cuadrado, ofrecen la máxima importancia, porque representan una preparación para el cálculo de la raíz cuadrada. En la figura 207 (1 se ve el análisis de dos cuadrados iguales, cuyo lado de 15 unidades está dividido en igual número de partes, 2, 3, 4, 6 ; pero las partes están inversamente distribuídas (Fig. 207 (2).

	6000	+ 400	+ 30	+ 2	
6000	36 000 000	2 400.000	180.000	12.000	38 592 000
+ 400	2.400.000	160.000	12.000	800	2 572 800
+ 30	180.000	12.000	900	60	192 960
+ 2	12.000	800	60	4	12 864
					41,370,624

$$\begin{array}{r} 6432 \\ 6432 \\ \hline 12864 \\ 19296 \\ 25728 \\ 38592 \\ \hline 41370624 \end{array}$$

Fig. 207 (1

A pesar de esta identidad y sólo por el hecho de su orden inverso, si se atribuyen a los números los valores jerárquicos decimales, resultan productos muy diversos entre sí ; en efecto, en un caso se trata del cuadrado del número 2.346 y en el otro del número 6.432.

Ahora bien : $2.346^2 = 5503716$
$6.432^2 = 41370624$

En la figura está representada la suma de las partes de la mis-

ma dirección horizontal y los productos parciales obtenidos siguiendo el correspondiente cálculo aritmético.

	2000 +	300 +	40 +	6	
2000 +	4 000 000	600.000	80.000	12.000	= 4.692 000
300 +	600.000	90.000	12 000	1.800	703 800
40 +	80 000	12.000	1 600	240	93 840
6	12 000	1.800	240	36	14.076
					5.503 716

$$\begin{array}{r} 2346 \\ 2346 \\ \hline 14076 \\ 9384 \\ 7038 \\ 4692 \\ \hline 5503716 \end{array}$$

Fig. 207 (2

Lo que se debe observar, especialmente, en la repetición del cuadrado, es la recíproca disposición de las figuras ; ésta se debe estudiar comenzando por la figura más rica de valor que es uno de los cuadrados extremos en el sentido de la diagonal, como sería en una de las figuras que ahora consideramos el cuadrado de 6000 y en la otra el de 2000. Partiendo de este cuadrado, que es un valor máximo, como de un centro, conviene observar la simetría de los rectángulos adyacentes, que tienen el valor más aproximado al máximo y poco a poco ver como se corresponden las figuras que tienen el mismo valor, siguiendo siempre los valores decrecientes la misma dirección hasta la unidad que se halla en el extremo opuesto de la diagonal que se inicia en el cuadrado inicial. La importancia de es as observaciones radica en que la superficie del cuadrado representa el número, y el lado la raíz cuadrada. Ahora, en la superficie del cuadrado, el número está analizado y dispuesto en orden a su valor, e indica qué partes de este valor están en relación directa con la raíz cuadrada ; esto es, los adyacentes al lado del cuadrado. Existen, pues, entre las partes, alguna que *indican la raíz* y puede decirse que contienen la *incógnita*. Estas partes, como se observa en la figura, son pocas y constituyen el marco angular que tiene por centro el cuadrado de máximo valor y, a mayor abundamiento, este marco teniendo partes simétricas, se reduce aún más su número. En cambio, la mayor parte de los valores no tienen contacto directo con la raíz y no depende de ellos el descubrimiento de la incógnita.

Este es, precisamente, el estudio que hay que llevar a cabo para encontrar la guía que nos conduce al cálculo de la raíz cuadrada.

ESTUDIO DEL CUADRADO TIPO

Es necesario, pues, construir un *cuadrado tipo*, es decir, una figura directriz, que sirve para presentar claramente la distribución de las partes interiores. A dicho fin, corresponde un cuadrado cuyo lado está dividido en partes iguales y que, por lo mismo, resulta compuesto por figuras cuadradas e iguales entre sí. El número correspondiente a las partes es la unidad que, según su función, asume diversos valores jerárquicos: 1, 10, 100, 1000.

La figura 208 representa el cuadrado de 1111.

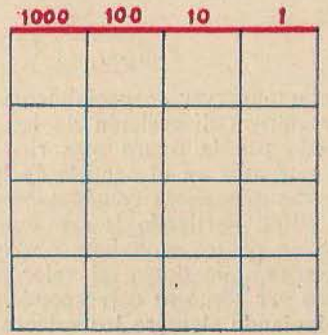


Fig. 208

Llevando a cabo los cálculos interiores, se fija la distribución de los valores del número que corresponde a 1111 en el cuadrado. La figura demuestra que los valores

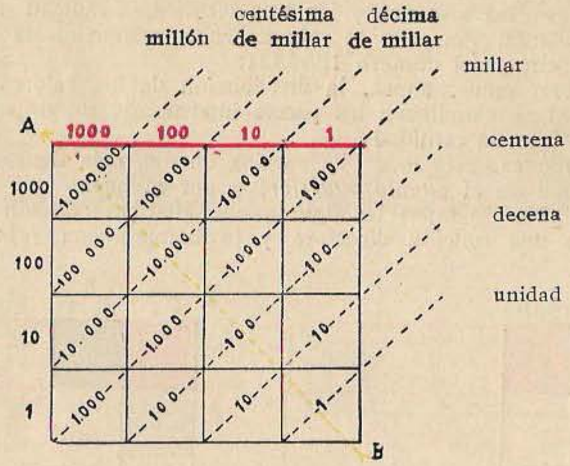


Fig. 209

vienen distribuídos en sentido diagonal y decreciente desde el extremo A. al extremo B. del cuadrado, y, las partes simétricas quedan dispuestas según líneas perpendiculares a la diagonal A. B. Los dos cuadrados extremos, el que forma ángulo de A y el que lo forma de B son únicos, es decir, carecen de simétrico. Uno de ellos está en relación con la raíz ; esto es, el de máximo valor en el ángulo A. Los valores del mismo grado son, en sentido diagonal, perpendiculares a A. B. y sumándolos se obtiene :

Unidad	1	=	1
Decenas	2	=	20
Centenas	3	=	300
Millares	4	=	4.000
Decenas de millar	3	=	30.000
Centenas de millar	2	=	200.000
Millones	1	=	1.000.000
			1.234.321

El número representado por el cuadrado es 1234321.

En relación con la raíz están únicamente algunos valores, los mayores; los millones y las tres cifras que indican el número de los millares. Por esto la raíz depende solamente de las primeras cuatro cifras del número 1234321.

Observemos, ahora, la distribución de los valores del número como si se estudiasen las partes internas de un organismo, y veremos que, la cantidad:

Millones, está toda ella sumida en una sola figura, que por su situación en el *ángulo superior*, y por el hecho que de su altura depende la de todas las figuras que guardan relación con la raíz, asume una función directora y la llamaremos: *Jefe del ángulo*

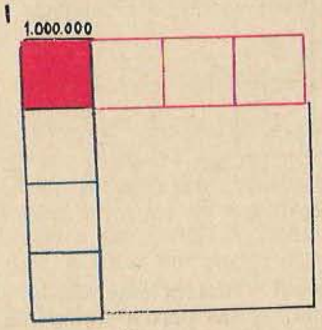


Fig. 210

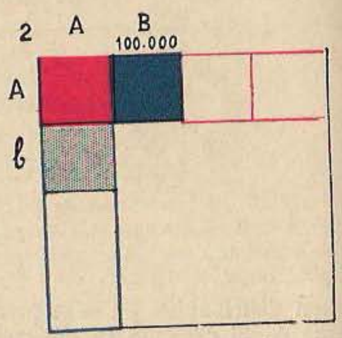


Fig. 211

La cantidad sucesiva en valor, esto es, las

2 *Centenas de millar*, se distribuyen en dos figuras adyacentes a la figura Jefe y, por eso, su lado tiene las mismas dimensiones que aquél. De ambas figuras, una sola guarda relación con la raíz, pero la cantidad debe rellenar, necesariamente, también otra figura igual y simétrica.

El valor sucesivo, o sea

3 *Decenas de millar* se distribuye en tres figuras, una de las cuales, es interna y desaparece, y las otras dos se distribuyen simétricamente, uniéndose a las figuras de valores inmediatamente superiores. Existe, pues, una parte *interna*, casi una víscera, que las decenas de millar tienen la obligación de rellenar antes de poderse distribuir en el exterior (Fig. 212).

Por fin, el último de los valores, de los cuales depende la raíz, es el de los

4 *Millares*. Este se distribuye en cuatro figuras y ocupa todo el camino de la diagonal. Mientras el primero, entre los valores, está concentrado en el único «jefe del ángulo», el último está disperso a lo largo de la diagonal. Dos de las cuatro son *internas*, viscerales; podemos llamarlas. dos vísceras simétricas y las otras dos se colocan en línea sobre los lados del ángulo. De éstas, una de ellas

toma parte en la raíz y la otra es su opuesta simétricamente. Así concluye la distribución de las partes del número que están ligadas a la raíz (Fig. 213).

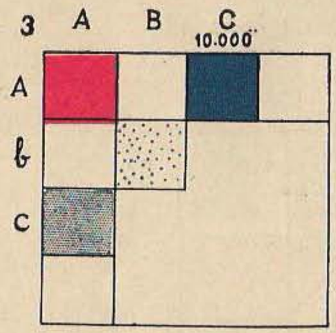


Fig. 212

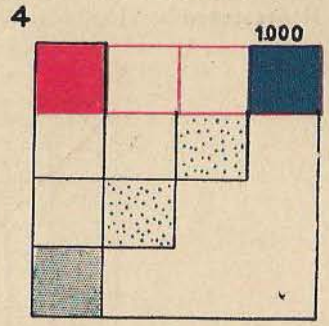


Fig. 213

Además de éstas, existen otras muchas figuras (todas aquéllas que están debajo de la barrera diagonal señalada por los millares) que no tienen contacto alguno con la raíz. Existe, pues, una parte de relleno, un *espacio muerto* que absorbe el resto del número. Este debe ser rellenado y la raíz no será segura hasta que no se haya probado si en el número hay cantidad suficiente para satisfacer esta necesidad. Es, pues, necesario observar atentamente también la distribución de valores en este espacio suplementario que completa el cuadrado.

Las centenas se distribuyen en tres espacios, de los cuales uno es asimétrico, interno, *visceral*; mientras, las cantidades de decenas y unidades son superficiales, como se observa en la figura 214.

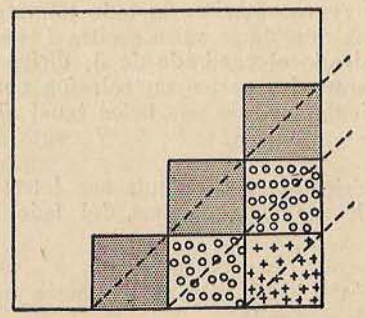


Fig. 214

Es conveniente ahora orientarse en un cuadrado cuyo lado esté dividido en partes desiguales. Esto viene a constituir una serie de ejercicios, en los cuales, los niños comprueban esta interesante distribución geométrica y las relaciones recíprocas de las figuras en que queda subdividido el cuadrado.

Representemos el número cuya raíz es 3245.

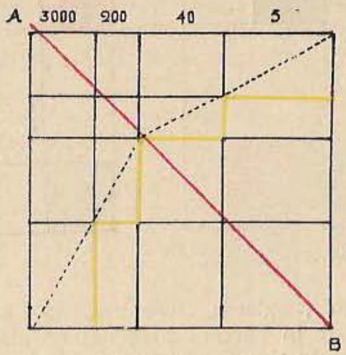


Fig. 215

El jefe angular es un cuadrado de 3. Sobre la diagonal A. B. sólo se encuentran figuras cuadradas y son las únicas que se pueden situar exactamente sobre una de las diagonales que atraviesan el gran cuadrado. La otras figuras son rectángulos tan diferentes entre sí, que no es posible alinearlos diagonalmente.

Las diagonales a través de las figuras que señalan la barrera, al otro lado de la cual está la parte muerta, es una línea quebrada, y esto sucede en la representación de todo número que no sea compuesto con la repetición de la misma cifra (444, 2222). La figura jefe del ángulo, siendo el cuadrado de 3, dirige toda la raya o faja angular, por lo tanto, las partes en relación con la raíz son todas rectángulos que tienen uno de sus lados igual al lado del cuadrado jefe : 3 × 3, 3 × 2, 3 × 4, 3 × 5. Y como esto, sucederá para cualquier número.

Se puede genéricamente substituir con letras la cifra que indican los valores de las subdivisiones del lado del cuadrado ; llamando

la primera cifra de la raíz	a
la segunda	b
la tercera	c
la cuarta	d

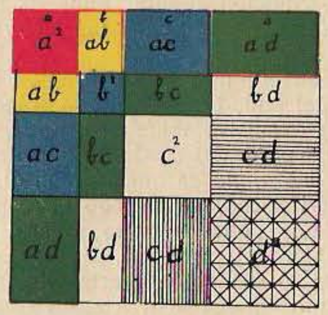


Fig. 216

El cuadrado jefe es, pues, el cuadrado de la primera cifra de la raíz : a^2. En éste se halla, pues, recogido el valor de los millones del número. Los dos rectángulos adyacentes, a. b. son una combinación de la primera con la segunda cifra de la raíz y se puede indicar así : 2 a b. En éstos se recoge el valor de las centenas de millar del número. El tercer valor, las decenas de millar llena el espacio interno b^2 (esto es : el cuadrado de la segunda cifra de la raíz) y después que ha dejado éste dispuesto, llena los dos rectángulos a. c. ; y de ese modo este valor se distribuye según las figuras siguientes : $b^2 +$ 2 a. c. Finalmente vienen los millares que ocupan cuatro rectángulos simétricos dos a dos, y dos de los cuales, son internos ; éstos resultan de la combinación de la segunda con la tercera cifra de la raíz : 2 b. c. Y los otros dos rectángulos externos resultan formados por la combinación de la primera, con la cuarta cifra de la raíz 2 a. d. Por esto, los millares ocupan el espacio indicado por 2 b. c. + 2 a. d.

Resumiendo, tendremos

los millones .... en a^2 =	cuadrado de la primera cifra de la raíz.
las centenas de millar en 2 ab =	doble producto de la primera por la segunda cifra de la raíz.
las decenas de millar en b^2 + 2 ac =	el cuadrado de la segunda cifra de la raíz, más el doble producto de la primera y la tercera.
los millares en 2 b c + 2 a d =	el doble producto de la segunda por la tercera cifra de la raíz, más el doble producto de la primera por la cuarta.

De semejante distribución resulta que, *toda parte en relación directa con la raíz, tiene como uno de sus factores, la primera cifra de la raíz.*

La parte muerta absorbente, es una región completamente alejada de la influencia del jefe, ella resulta de combinaciones entre las otras cifras de la raíz exclusivamente ; es, pues, casi una repetición a la inversa de aquella parte del cuadrado que llega hasta la barrera diagonal. Aquí están las *unidades* que forman el ángulo y, en todas las combinaciones periféricas, es el lado de este cuadrado opuesto el que dirige. Es decir : que la parte muerta tiene como jefe o director, el ínfimo valor del cuadrado. En efecto, el d^2 es el cuadrado de las unidades, o sea de la cuarta cifra de la raíz. Después siguen las decenas que se disponen a ambos lados en dos rectángulos simétricos construídos sobre la tercera y cuarta cifra de la raíz : 2 c d. Por fin, las centenas se distribuyen en tres grupos ; uno interno asimétrico, que es el cuadrado de la tercera cifra c^2 ; y dos rectángulos 2 b d que se acomodan sobre los de las decenas.

En resumen, la parte muerta se distribuye de la siguiente manera : las centenas en $c^2 \times 2$ b d, el cuadrado de la tercera cifra más el doble producto de la segunda por la cuarta.

Las centenas en 2 c d, esto es, el doble producto de la tercera por la cuarta cifra.

Las unidades en d^2, o sea el cuadrado de la cuarta cifra.

RELACIONES NUMERICAS

Es preciso, pues, conocer, primeramente, el elemento esencial del número, esto es, aquel del cual se obtiene la primera cifra de la raíz.

Las cifras de una raíz múltiple (esto es, de varios números) pueden ser 2, 3, 4 y más. Limitando el cálculo a las unidades únicamente, dicha raíz puede tener los siguientes valores :

1
10
100
1000

y, por lo tanto, el número que indica el cuadrado de cada una es :

$$1^2 = 1$$
$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10.000$$
$$1000^2 = 1000.000$$

lo cual quiere decir que el número de ceros existentes en la raíz, se duplica en su cuadrado, por lo cual *a cada puesto jerárquico de la raíz corresponden dos en el número que representa su cuadrado.*

Este hecho resuelve un problema, porque nos dice cuantas cifras tendrá la raíz de un número dado ; hay que dividir en grupos de dos cifras partiendo de derecha a izquierda, o lo que es igual, desde las unidades hacia las jerarquías superiores, y a cada grupo corresponde una cifra en la raíz. Sea, por ejemplo, el número 26758439. Este se prepara en grupos de dos cifras 26.75.84.39, resultando cuatro los grupos, cuatro serán las cifras de la raíz ; esto es, será un número que contendrá millares. La primera cifra deriva del último grupo que, en este caso, está representado por 26.000.000. La raíz de este número, nos dá lo que representa la parte fundamental y directiva de todo el cálculo ; es entonces un número, sobre el cual, se puede operar como cuando se buscaba la raíz de una cifra, de aquel modo sencillo, esto es, construyendo cuadrados sucesivos con aumentos angulares.

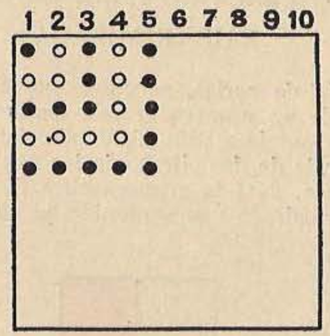


Fig. 217

En este caso, la primera cifra, esto es, la raíz de 26 es 5 (con resto de 1). (Fig. 217).

Sea otro número, el 728495. Este se divide en grupos de dos cifras de derecha a izquierda 72.84.95 ; y resultando tres grupos, esto revela que la raíz llega a contener centenas. La parte que da la primera cifra, (cifra de las centenas) es el 72 (72 decenas de millar). El 72 es el número sobre el cual, se puede proceder en la forma indicada y resulta que la primera cifra es 8 con 8 de resto. (Fig. 218).

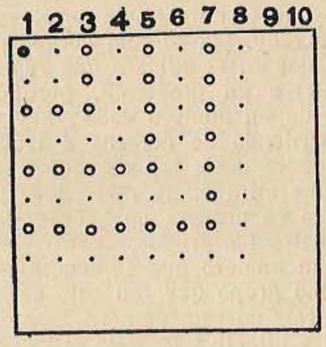


Fig. 218

PROCEDIMIENTO PRACTICO PARA LA OBTENCION DE LA RAIZ CUADRADA

Con un material de perlas, se puede proceder a la obtención de la raíz cuadrada de un número grande que tenga la raíz de dos o más cifras; por ejemplo 2136. Teniendo éste dos grupos de dos cifras, tiene una raíz de dos cifras, de los cuales el grupo más alto, esto es 21 centenas, dará la primera cifra de la raíz. Es necesario tener delante un cuadrado tipo contenido en aquellos límites.

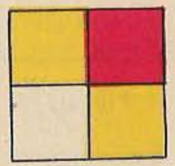
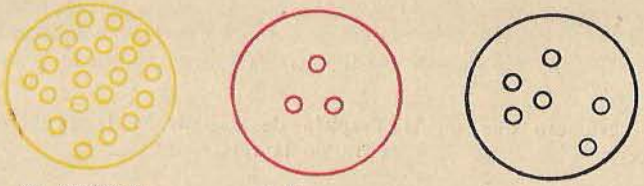


Fig. 219

Aun cuando se trate de un número que contenga millares, éstos no serán, sino bajo forma de centenas, *porque es el segundo grupo* (partiendo de las unidades) *en su total* el que contiene la primera cifra de la raíz. El número, pues, debe analizarse en la siguiente forma: 21 centenas, 3 decenas y 6 unidades.

Utilizaremos un material análogo al de las divisiones grandes; platillos para contener el número en forma de perlas sueltas, de distinto color según las jerarquías; tubos con 10 perlas, también de distintos colores para los cambios y una mesa con huecos dis-

puestos en forma cuadrada donde puedan colocarse las perlas. Las mesas que se usan para la extracción de raíces, difieren de las ya usadas para la multiplicación en que en la parte superior no está la serie sucesiva de los números y la cantidad de huecos, es mucho más grande (fig. 238 (2). Tomaremos—procediendo a la extracción de la raíz—tres platillos, poniendo en el primero 21 perlas (de las centenas), 3 perlas en el segundo (de las decenas) y 6 en el tercero (de las unidades).

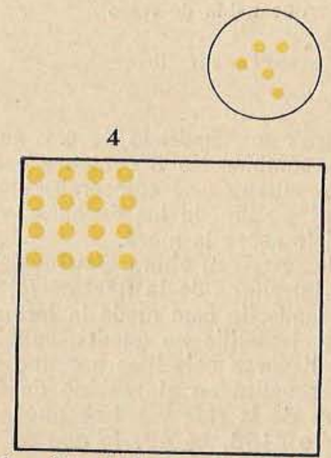


21 centenas 3 decenas 6 unidades

Composición del número del que se tiene que extraer la raíz, representado por perlas

Fig. 220

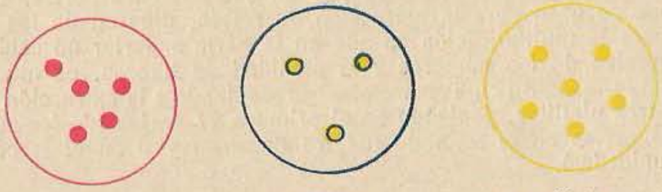
Cuando se procede a operar, se coloca sobre la mesa solamente el platillo en uso, en este caso el primero que contiene 21 perlas y éstas se disponen tratando de construir un cuadrado siempre mayor, mediante colocación angular de las perlas disponibles.



5 centenas de resto

Colocación de las centenas y hallazgo de la primera cifra de la raíz

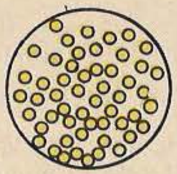
Fig. 221



5 centenas 3 decenas 6 unidades

Fig. 221 (a

Número que queda después de encontrada la primera cifra de la raíz



53 decenas correspondientes a las tres del número y a las 50 que han resultado de cambiar las 5 centenas que había de resto

Fig. 221 (b

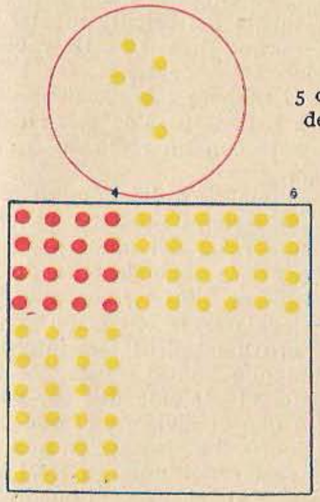
Así se llega a construir un cuadrado de 4 y queda un resto de 5 perlas. Precisa ahora cambiar las 5 centenas convertidas en decenas y las 50 perlas resultantes se colocarán, juntamente con las que ya había allí, en el platillo de las decenas, y éste es el que se usará ahora colocándolo sobre la mesa.

Las perlas de las decenas van ahora distribuídas en dos grupos a lo largo de los lados interiores de la figura jefe, esto es, 4 a un lado y 4 a otro, continuando de este modo la formación de filas de 4 perlas, hasta que en el platillo no queden suficientes para completar las dos filas. Al llegar a seis filas por uno y otro lado quedan aún 5 perlas que constituyen el residuo de las decenas. Es, pues, 6 la segunda cifra de la raíz y así se puede ya decir que la raíz cuadrada del número 2136, es 46, lo que en cifras se escribe así :

$$\sqrt{2136} = 46$$

Aun cuando se sepa ya la raíz, la operación no ha concluído. Se la debe completar rellenando la parte complementaria del cuadrado constituída por las unidades. Solamente, después de llenar dicho espacio residual sabremos si existe en el número cantidad suficiente. Si no se pudiera efectuar dicho relleno, habría que disminuir la raíz. Además, completando la operación, sabremos si la raíz es exacta y si del número queda un resto.

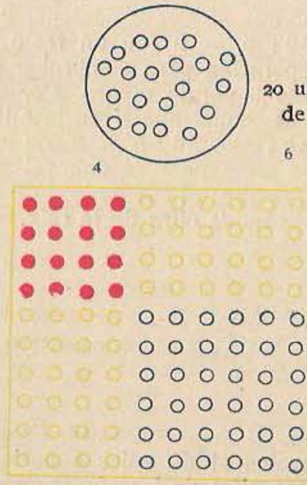
Las 5 perlas, residuo de las decenas, se deben trocar cada una por 10 unidades, esto es, en perlas de otro color que se depositarán en el último platillo, juntamente con las otras 6 que en él se encontraban ya y, con ellas, se rellena el último espacio libre del cuadrado.



5 decenas de resto

Fig. 222

Colocación de las decenas y hallazgo de la segunda cifra de la raíz



20 unidades de resto

Colocación de las unidades y fin de la operación

Fig. 223

Las perlas han sido en número suficiente para cubrir el cuadrado de las unidades y en el platillo queda un residuo de 20 unidades. El resultado definitivo es, pues, el siguiente $\sqrt{2136} = 46$ con un resto de 20.

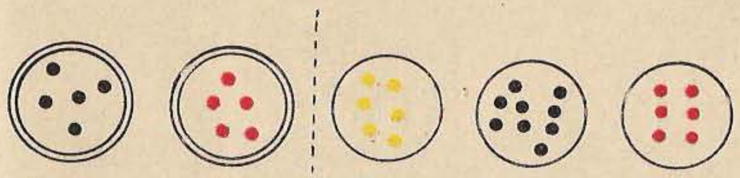
CALCULO ARITMETICO DE LA RAIZ CUADRADA

Busquemos ahora el modo de traducir, en puro cálculo con cifras la extracción de raíces llevada a cabo con las perlas, y de manifestarla con palabras. Dividido en grupos de dos cifras el número 2136 buscaremos la raíz de 21 bien sea por medio del cálculo mental o utilizando la tabla n.° 1. La raíz es 4, porque $4 \times 4 = 16$ y este número sustraído del 21 deja un residuo de 5 centenas. Se baja ahora la cifra de las decenas y obtengo el número 53 que debe ser dividido por el doble de la primera cifra hallada para la raíz; esto es, $2 \times 4 = 8$; resultando 6 de cociente con un resto de 5, el 6 es la segunda y última cifra de la raíz.

Para terminar la operación, bajo la última cifra del número, del cual, se extrae la raíz, 6 unidades y, de ese modo, se obtiene un total de 56 unidades que es en síntesis lo que resta del número. Este debe satisfacer la condición que dividido por la segunda cifra de la raíz de cociente, da por lo menos, la mismama cifra. O sea, que es preciso que 56 pueda contener 6×6. Ejecutando la operación se ve que $56 : 6 = 9$ con un resto de 2. Pero a nosotros nos interesa esta operación para comprobar solamente que $56 : 6$ puede dar de cociente 6 por lo menos. Por dicha razón el cociente útil es, para nosotros, aquel que tiene la misma cifra que el divisor; lo que excede es resto. $56 : 6 = 6$ con un resto de 20. La sustracción que se lleva a cabo para obtener el resto es restar del número total de unidades (56) el cuadrado de 6 ($6 \times 6 = 36$), esto es, el cuadrado de la segunda cifra de la raíz.

EXTRACCION DE RAICES DE TRES CIFRAS

Sea el número 55696. Este puede dar tres grupos 5.56.96. De los cuales el de valor superior, consta de una sólo cifra, 5. La primera cifra de la raíz es, pues, la raíz de 5, esto es, 2. 2 centenas. Pero procedamos con calma y con orden riguroso. Constituiremos, antes de nada, el número total con las fichas de varios colores, según el valor que éstas representan,

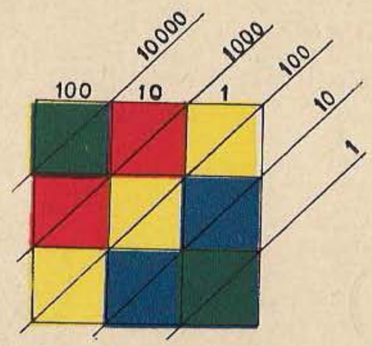


5 decenas de millares — 5 millares — 6 centenas — 3 decenas — 6 unidades

Composición del número que tendrá una raíz de tres cifras

Fig. 224

y tengamos delante el cuadrado-guía, con su lado dividido en tres partes, gracias al cual está a la vista el esquema de la distribución del número.



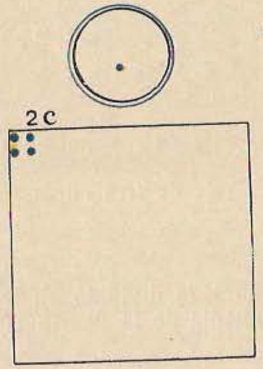
Cuadrado guía que indica cuantos espacios se tienen que llenar con cada jerarquía, y la situación de ellos

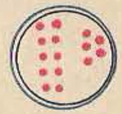
Fig. 225

Segregando una ficha de las decenas de millar, ésta se transforma en 10 fichas. Este platillo que tiene ahora 15 fichas, se coloca sobre la mesita y las fichas se distribuyen en dos grupos simétricos como en la figura 226 (3, resultando, entonces, el número 3 que representa la segunda cifra de la raíz; 3 decenas.

En el platillo de los millares quedan fichas que se convierten en 30 centenas en el platillo siguiente, donde se usen a los 6 que en él ya estaba. Después de haber formado un cuadrado de 3, colocado entre los dos grupos precedentes, se divide el remanente en dos grupos como aparece en la figura, y resulta el número 6 que es la última cifra de la raíz (fig. 226 (1-7). Por lo tanto la raíz completa buscada es el número 236 (fig. 227).

resto 1 decena
de millar



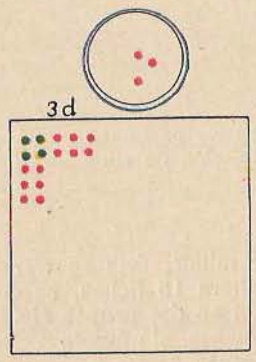


15 millares correspondientes a 5 en el número y a las diez de la decena que había quedado

Colocación de las decenas de millares y hallazgo de la primera cifra de la raíz

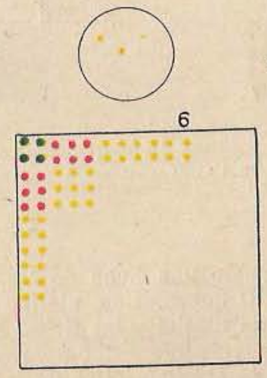
Fig. 226 (1-2

resto 3
millares



Colocación de los millares : hallazgo de la segunda cifra

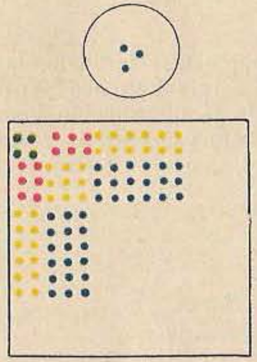
resto :
3 centenas

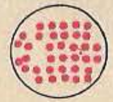


Colocación de las centenas : hallazgo de la tercera cifra de la raíz

Fig. 226 (3-4

resto :
3 decenas



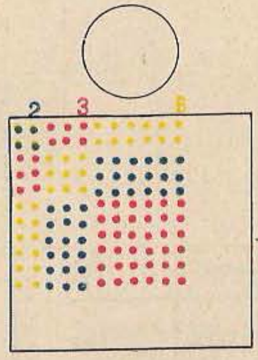


36 unidades : 30 correspondientes a las decenas, 6 que habían en el número

Colocación de las decenas

Fig. 226 (5-6

resto ninguno :
raíz exacta



Colocación de las unidades

Fig. 226 (7

Fig 227

Inversa. Sería un trabajo análogo el representar la anatomía del número en relación con la raíz hallada. La raíz 236 nos permite, en efecto, construir el cuadrado que refleje la distribución geométrica del número del cual hemos partido, esto es, 55696, y seguir el juego interior acaecido entre las partes que, funcionando, han extraído la raíz.

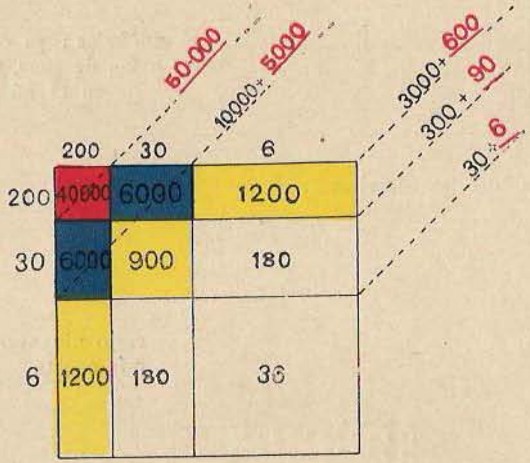


Fig. 228

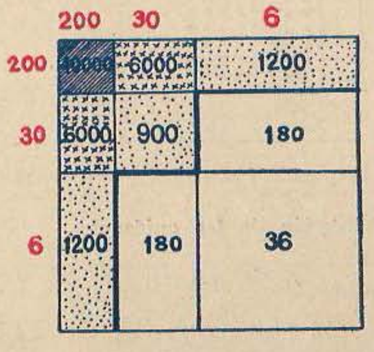


Fig. 229

EXTRACCION DE RAICES DE CUATRO CIFRAS

Pongamos otro ejemplo: de un número más mayor cuya raíz sea de cuatro cifras.

Sea el número 27.394.759.

Este número se divide en grupos de dos de derecha a izquierda para saber cuantas cifras y valores tendrá su raíz cuadrada.

27. 39. 47. 59.

La raíz, número de cuatro valores tiene comienzo en los millares. El cuadrado, guía relativa de la distribución de los valores del número, tiene su lado dividido en cuatro partes.

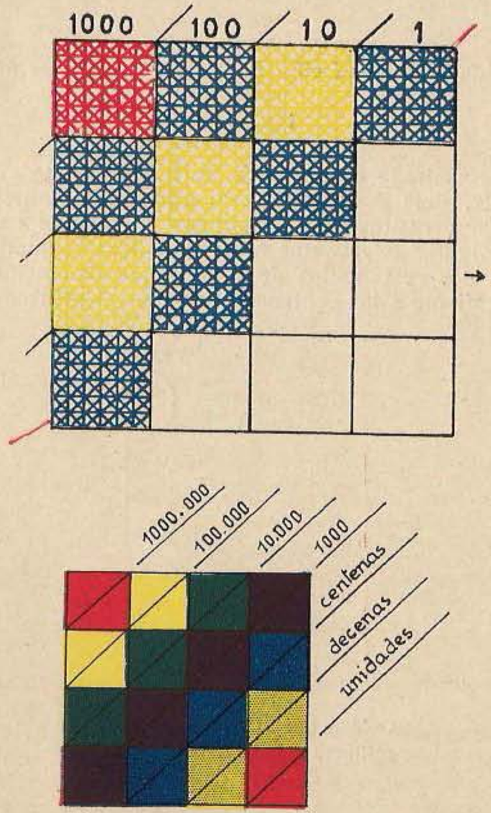
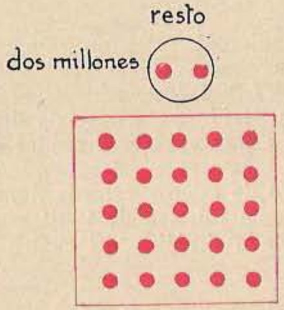


Fig. 230

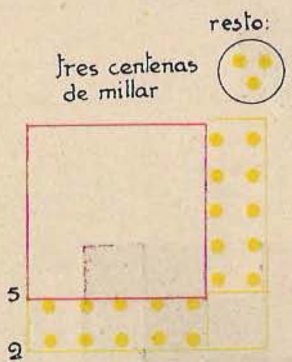
Construiremos para ello el cuadrado de los millares, distribuyendo el grupo en 27 perlas.



Colocación de los millones :
hallazgo de la primera cifra de la raíz : la de los millares

Fig. 231

El primer cuadrado es cuadrado de 5 y da como cifra de millares de la raíz, deja dos como resto que van a unirse a las centenas de millar constituyendo el número 23, con el cual, se deben construír las figuras adyacentes reservadas a las centenas de millar. Estas cubren dos rectángulos de 5 × 2 que dan como cifra de la raíz correspondiente a las centenas el número 2 utilizando 20 perlas.



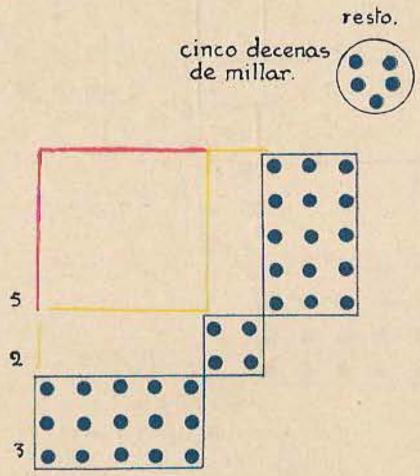
Colocación de las centenas de millares : hallazgo de la segunda cifra de la raíz

Fig. 232

Quedan, pues, 3 que irán a unirse a las decenas de millar formando el número 39.

Este 39 debe formar tres figuras : una de ellas está determinada por los lados de los dos rectángulos precedentes, las otras se deben buscar colocando las perlas a lo largo de los lados del 5 de los dos rectángulos formados con las centenas de millar. El cuadrado a rellenar es de cuatro perlas. Resultan dos rectángulos 5 × 3 que determinan la tercera cifra buscada 3, que significa 3 decenas en la raíz. Las perlas correspondientes a las decenas de millar, usadas en total, son :

$$2^2 + 2\ (3 \times 5) = 4 + 30 = 34.$$

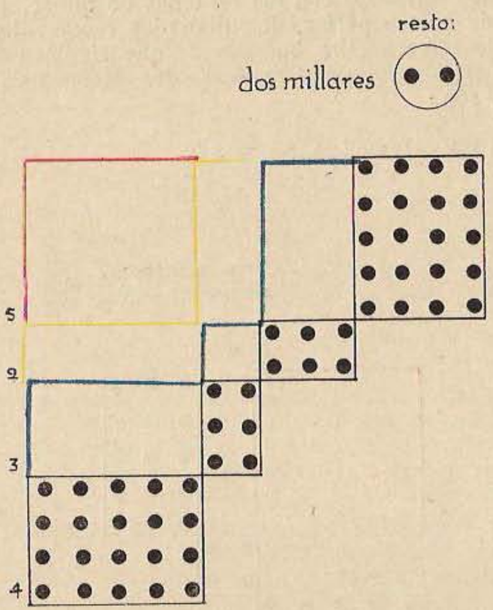


Colocación de las decenas de millares : hallazgo de la tercera cifra de la raíz

Fig. 233

El grupo entero eran 39, quedan, pues, de resto, 5 perlas que se unen a los cuatro millares del número.

Tenemos, pues, 54 millares que deben rellenar las cuatro figuras correspondientes a los millares según el modelo. Dos de ellas están ya determinadas por los lados adyacentes de las 3 figuras que acabamos de construir. Son los dos rectángulos centrales (2 × 3) que en total emplean 12 perlas. Las otras perlas del grupo de millares (54 — 12 = 42) son 42 y éstas deben distribuirse a lo largo de los lados de los rectángulos precedentes que presentan cinco unidades. Si 42 perlas se distribuyen en 4 filas de cinco por cada lado 5 × 4 = 20, se emplean 40 y quedan dos de resto.



Colocación de los millares:
hallazgo de la última cifra

Fig. 234

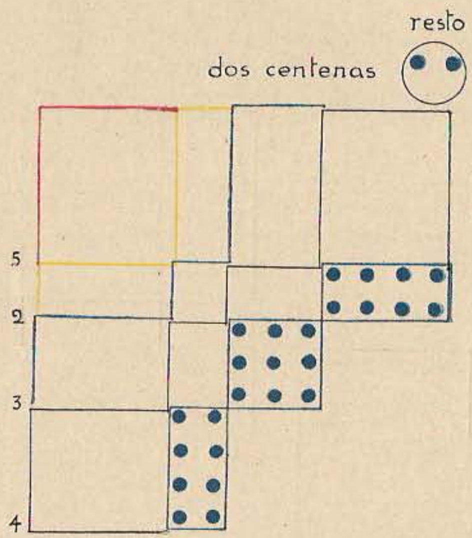
Las perlas utilizadas en total para rellenar las cuatro figuras correspondientes a los millares, han sido, pues, (2 × 20) + (2 × 6) = 40 + 12 = 52.

La raíz está ya determinada por los números 5, 2, 3, 4 y por lo tanto $\sqrt{27.394.759} = 5234$.

Sin embargo, la operación no ha concluído todavía.

Faltan por rellenar los huecos, ahora ya determinados, que corresponden a las centenas, decenas y unidades del mismo.

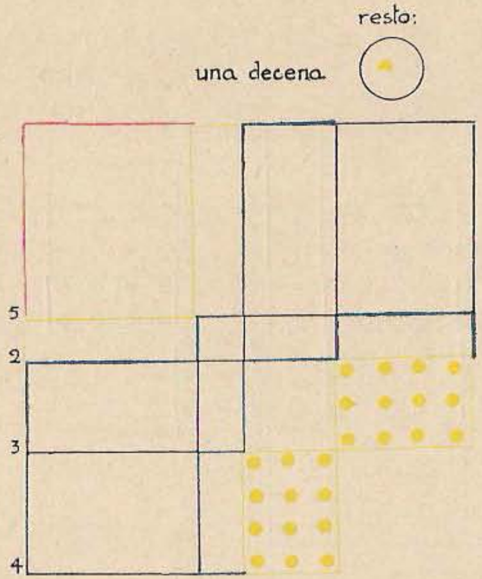
Con las 27 centenas se rellenan las tres figuras, determinadas por las precedentes, que son: un cuadrado 3 × 3 y dos rectángulos 2 × 4, es decir (3 × 3) + 2 (2 × 4) = 9 + 16 = 25.



Colocación de las centenas

Fig. 235

Este número, restado de las 27 centenas disponibles, da un resto de 2. Estas 2 centenas se unen a las cinco decenas del número. Ahora, con las 25 decenas resultantes se deben llenar las dos figuras correspondientes, que son dos rectángulos 2 × 4, es decir, 2 (3 × 4) = 2 × 12 = 24.



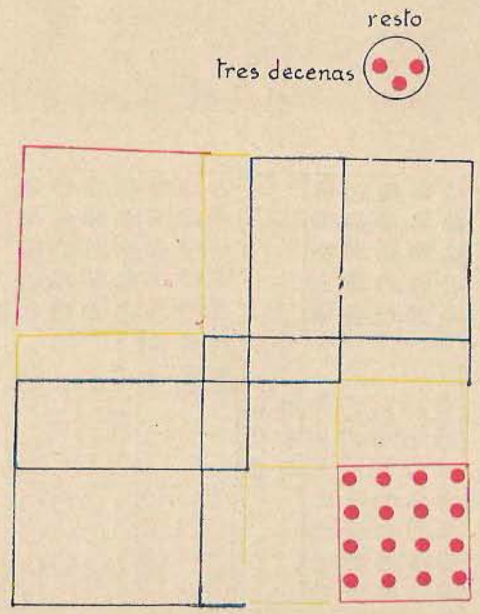
Colocación de las decenas

Fig. 236

Resta una decena que, agregada a las nueve unidades del número, dan la última cantidad del número, o sea 19 unidades, con las cuales precisa formar el cuadrado extremo opuesto al primero construído.

Este cuadrado es de $4 \times 4 = 16$.

El número grande tiene, pues, un resto de 3.



Colocación de las unidades y fin de la operación

$\sqrt{27.394 + 759} = 5234$ con resto de 3

Fig. 237

Toda la operación se indica definitivamente así :

$\sqrt{27.394.759} = 5234$ con un resto de 3.

Si se efectúa la multiplicación 5234×5234 se obtiene el número 27394756 al que, añadiendo el resto 3, nos da el primitivo.

Veamos ahora la operación numérica correspondiente a la ejecutada con el material.

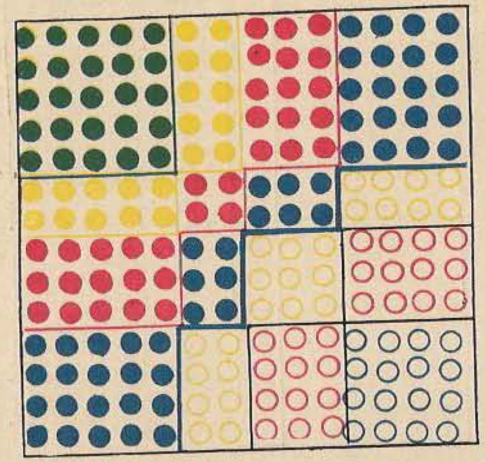


Fig. 238 (1

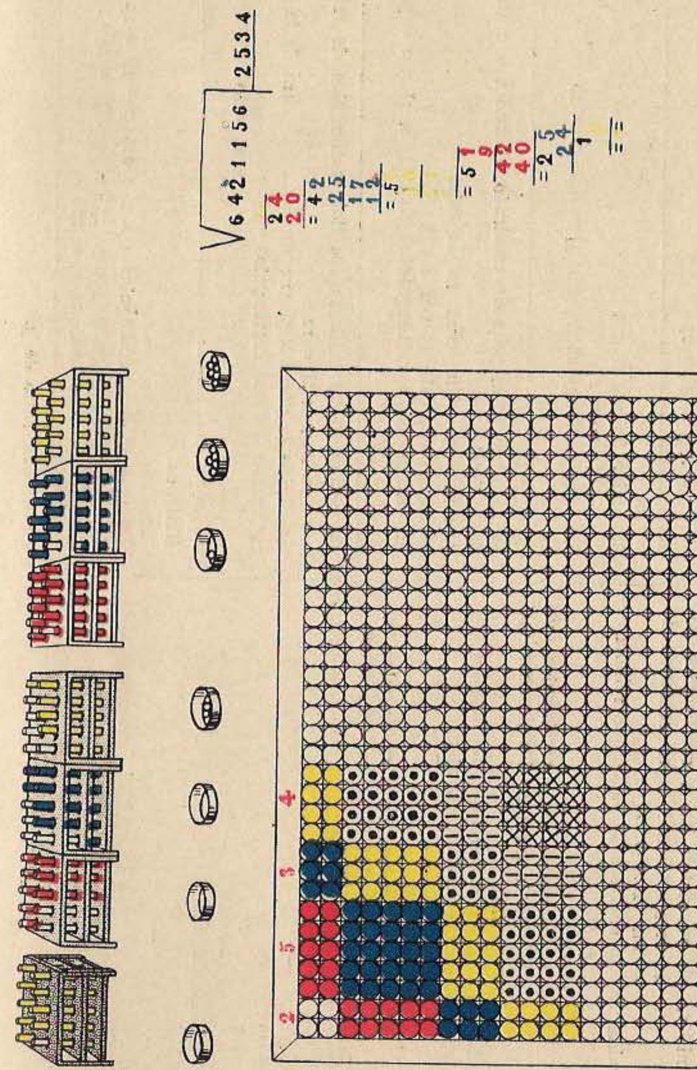


Fig. 238 (2

$\sqrt{}$ 2 7 3 9 4 7 5 9	5 2 3 4
Millones .... 25 se resta el cuadrado de los millares 5^2	raíz cuadrada de 27 = 5 (resto 2) $5 \times 5 = 5^2 = 25$
Centenas de millar. 23 se restan los 2 rectángulos co- 20 rrespondiente a las centenas de m. (2×5) 2.	Se divide 23 por 2×5 $23 : 10 = 2$ Los dos rectángulos 2 $(2 \times 5) = 2 \times 10 = 20$
Decenas de millar ... 39 se resta la parte que rellena. 4 35 se restan los 2 rectángulos que 30 dan la cifra de las decenas (3.ª cifra).	Se resta de 39 el pequeño cuadrado interno 2×2 (de la 2.ª cifra) $35 : 10 = 3$... (sin cifra en la raíz) Después se divide 35 por 2×5 Se restan los 2 rectángulos 5×3. $(5 \times 3) \times 2 = 30$
Millares .... 54 se restan los 2 rectángulos que 12 rellenan 2 (2×3). 42 40 se restan los 2 rectángulos que dan la 4.ª cifra (unidades).	Se restan de 54 millares los dos rectángulos de relleno o sea 2 $(2 \times 3) = 12$ Se divide 42 por 2×5. $42 : 10 = 4$... (4.ª cifra de la raíz) Se restan los dos rectángulos 5×4. $2 \times (5 \times 4) = 2 \times 20 = 40$
Centenas .... 27 25 Decenas .... 25 24 Unidades 19 16 3	Rellenos a sustraer De $27 - 3^2 + 2$ rectángulos 4×2 o sea $9 + 16 = 25$ De $25 - 2$ rectángulos 4×3. $25 - 2\ (4 \times 3) = 25 - 24 = 1$ De 19 — el cuadrado de $4 = 16$
	Sucede un resto de 3.

Fig. 238 (3

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{27.39.47.59} & 5234 \\
25 & \\
\hline
23 : (2.5) = 2 & \\
20 & \\
\hline
39 & \\
4 & \\
\hline
35 : (2.5) = 3 & \\
30 & \\
\hline
54 - 2\ (2 \times 3) & \\
12 & \\
\hline
42 : (2 \times 5) = \mathbf{4} & \\
40 & \\
\hline
27 - (3^2) & \\
9 & \\
\hline
18 - 2\ (4.2) & \\
16 & \\
\hline
25 - 2\ (4.3) & \\
24 & \\
\hline
19 - 4^2 & \\
16 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

Fig. 238 (4

RAIZ CÚBICA

RAIZ CUBICA

Si en vez de considerar un número elevado al cuadrado se le considera elevado al cubo, o sea, a la tercera potencia $a^3 = a \times a \times a$, entonces el mismo número es la raíz cúbica de la potencia.

Geométricamente se puede considerar la arista como la raíz del cubo. En el material de perlas, el bastoncillo de 10 representaría la raíz de 1000.

En efecto, $10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 = 10^2 \times 10 = 10^3 = 1000$.

Recordemos aquí los números que se refieren al material llamado «cubos de perlas».

El numero de perlas en los distintos cubos era progresivamente, entre **1 y 10**

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$

Aquí se observa que el cubo de un grupo de unidades no llega jamás al millar, esto es, que queda siempre encerrado en el grupo jerárquico de las unidades (las primeras tres cifras: unidades, decenas y centenas).

En cambio, apenas se llega a las decenas, la tercera potencia está encerrada en el grupo jerárquico de los millares.

$10^3 = 1000$
$20^3 = 8000$
$30^3 = 27000$
$40^3 = 64000$
$50^3 = 125000$
$60^3 = 216000$
$70^3 = 343000$
$80^3 = 512000$
$90^3 = 729000$

A su vez la tercera cifra de la base, esto es, la centena, tiene su tercera potencia en el grupo jerárquico de los millones.

100^3 = 1.000000
200^3 = 8000000
300^3 = 27000000
400^3 = 64000000
500^3 = 125000000
600^3 = 216000000
700^3 = 343000000
800^3 = 512000000
900^3 = 729000000

A cada grupo de unidades simples en la raíz corresponde un grupo de tres cifras en la tercera potencia.

	millones	millares	simples
(cubo)	centenas decenas, unidades	centenas, decenas, unidades	centenas, decenas, unidades
(raíz)	centenas	decenas	unidades
		simples	

Si un número, pues, está compuesto de decenas y unidades, la tercera potencia ocupará el primero y segundo grupo de cifras Por ejemplo 35^3 = 42.875.

Si tenemos un número, como el 421.875, se sabe que su raíz consta de decenas y unidades: en efecto, esta es 75.

Si careciese de unidades no habría cifras positivas en el primer grupo de tres como se ha visto anteriormente.

70^3 = 343.000 ; 343 es el cubo de 7.
7_3 = 343 ; 70^3 = 343.000 ; 700^3 = 343.000.000

Cuando se quiere, pues, hallar la raíz cúbica de un número se debe dividir éste en grupos de tres cifras de derecha a izquierda y la cantidad de grupos indica de cuantas cifras está compuesto el número de la raíz cúbica.

Por ejemplo, el n.° 592.704.000 tiene una raíz cúbica de centenas y decenas, pero las unidades de ésta son cero, porque así lo indica el primer grupo de tres ceros.

En efecto, la raíz cúbica de dicho número es 840.

En cambio el número 791.453.125 indica una raíz cúbica con centenas, decenas y unidades efectivas; en efecto su raíz cúbica es 925.

A esta primera observación se puede añadir otra seguidamente ·

esto es, que se puede determinar efectivamente la cifra más alta de la raíz.

Sea por ejemplo el n.° 15625.

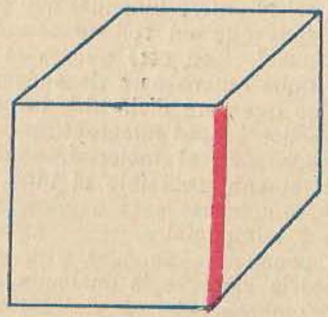
La raíz consta de décenas y unidades y las decenas son dos porque el cubo de 2 es 8 pero el de 3 sería 27, número que excede al 15.

Tomemos otro número, el 35937 ; su raíz tiene decenas y unidades efectivas y las decenas son 3, porque 3^3 = 27, mientras el cubo de 4 sería 64. Efectivamente, la raíz correspondiente a dicho número es 33.

Precisa para ello tener siempre presentes los cubos de los primeros números entre 1 y 10, es decir los cubos de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, porque solamente así puede determinarse la primera cifra de una raíz cúbica y así se inicia la operación de «extraer la raíz cúbica» de un número.

EL CALCULO PARA LA EXTRACCION DE LA RAIZ CUBICA

Para proseguir el cálculo de la extracción de la raíz cúbica precisa, antes que nada, tener presente el *cubo*.



La arista es la raíz del cubo

Fig. 239

La raíz cúbica de un cubo es su arista (fig. 239).

Volvamos a utilizar el material que nos ha servido para *construir* los cubos, como por ejemplo, los cubos de paso de un grado a otro de la torre roja (ejercicios de álgebra que han conducido a la construcción genérica del «cubo de un binomio»).

El cubo del binomio $(a + b)^3$ nos indica la construcción de un cubo cuya arista es la suma de dos partes desiguales *a* y *b*.

Este se construye con dos cubos 3^3 y b^3 y con prismas, tres de los cuales tienen como sección a^2 y como altura *b* y tres que tienen como sección b^2 y como altura *a*.

Los trozos necesarios para semejante construcción corresponden a la fórmula algebraica $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Los prismas correspondientes a cada uno de los dos cubos, base, se colocan sobre tres caras adyacentes del cubo mismo, uno apoyado encima y dos en contacto con las dos caras laterales contiguas, tocando el pequeño cubo con sus caras cuadradas que corresponden en los prismas.

Usando el material, esto se puede hacer separadamente con los dos pequeños cubos-base, comprobándose que salvo las dimensiones relativas se tiene siempre el mismo dispositivo. Para las dimensiones los dos grupos se integran disponiendo sus centros (los cubos) diagonalmente, con lo que se viene a construir el cubo del binomio.

También en los dos grupos, cuando están separados entre sí, se encuentra siempre la arista entera del cubo del binomio $(a + b)$ porque cada prisma superpuesto a uno de los cubos tiene la altura del otro cubo.

Si el problema fuera, pues, no el construir el cubo, sino simplemente conocer la arista binomial, bastaría uno solo de los grupos.

Y si una de las partes de la arista fuese conocida (por ejemplo del pequeño cubo a) bastaría colocar en torno suyo los tres prismas correspondientes en el orden debido y en seguida se vería aparecer por tres lados la arista entera binomial que se busca.

El resto no sería más que un relleno completamente sin importancia directa y esencial. Con esto queremos decir, que no es necesario construir el cubo entero para después medir o buscar la arista (raíz cúbica), sino que para dicho fin, basta con la mitad del cubo (o sea uno de sus dos grupos integrantes).

Jugando, solamente viendo el material, esto se presenta con una evidencia verdaderamente accesible al niño, para el cual, las palabras más sencillas, empleadas para explicar este hecho, serían seguramente obscuras e ininteligibles.

Un ejercicio que conduce a ahondar esta evidencia, a hacer comprender lo que podría llamarse la anatomía del cubo, es el de los pasos sucesivos, de cubo a cubo, desde el 1 al 10, bien sea regularmente o a saltos.

Otro es la construcción del binomio, hecha con el material compuesto por los cubos negros y los prismas de cristal.

Los ejercicios descritos en el capítulo del álgebra, constituyen precisamente una preparación dirigida al fin que ahora nos proponemos ya que la anatomía del cubo puede convertirse en una *guía* del cálculo de la raíz cúbica. A dicho fin, análogamente a cuanto se hizo para preparar el cuadrado guía en la extracción de la raíz cuadrada, precisa preparar con cuidado un cubo-guía basándolo en la fórmula del cubo del binomio.

Precisa, sin embargo, seguir el cálculo algebraico con una exactitud especial, porque éste ya no consta solamente de los dos elementos constitutivos de la arista de un cubo, como serían 2 + 3.

Se ha convertido en un símbolo al cual aplicamos nosotros un

valor decimal. Si la arista es 2 + 3, ésta consta de 2 decenas y 3 unidades y, aun cuando las partes sigan materialmente invariables, su orden se hace esencial, porque se refiere a la jerarquía de los números. Para diferenciar este concepto en lugar de *a* y de *b* usaremos las letras del alfabeto que más se aproximan al significado decimal y diremos *d* (decenas) y *u* (unidades).

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3ud^2 + u^3.$$

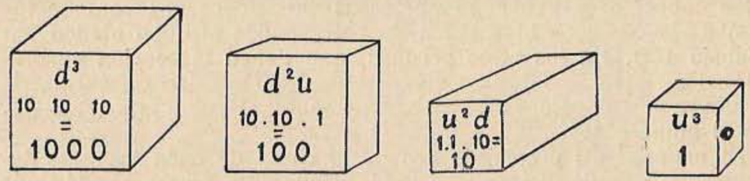


Fig. 240

Esta fórmula puede ser usada como guía en la construcción de un cubo binomial; primeramente se coloca el cubo mayor que indica las decenas; hecho esto se disponen los 3 prismas d^2u como segundo tiempo, después se colocan los tres prismas u^2d y por fin, en último lugar, se coloca el cubo de las unidades u^3. Este orden preciso es necesario y la labor de colocar las piezas bajo la guía de la fórmula algebraica es una de las tareas ilustradoras para el procedimiento del cálculo.

Se puede primeramente traducir la fórmula en unidades decimales y después referir los varios términos a las partes diversas que constituyen un cubo binomial.

$$d^3 + 3d^2u + 3u^2d + u^3$$
$$10^3 + 3\,(10^2 \times 1) + 3\,(1^2 \times 10) + 1^3$$
$$1000 + 3\,(100 \times 1) + 3\,(1 \times 10) + 1.$$

La correspondencia, pues, entre los elementos de la fórmula y las jerarquías decimales, es precisamente esta:

d^3 .... 1.000 o sea orden de millares.
d^2u .... 100 o sea orden de centenas.
u^2d .... 10 o sea orden de decenas.
u^3 .... 1 o sea orden de unidades.

Estos valores pueden hallar su correspondencia en el material, y para ello, uno de los cubos corresponde a millares, y el otro, a la unidad. Los tres prismas relativos al cubo de los millares corresponden a centenas y los otros, en cambio, a decenas.

El cubo así analizado representaría el número, mientras su arista partida en dos representaría su raíz cúbica.

EL CUBO-GUIA

Tenemos delante un material que representa la guía del cálculo y está constituído por dos cubos distintos el uno al otro en dimensiones y color, por ejemplo, blanco y gris. Sobre sus pinturas se puede escribir y después borrar. Escribamos sobre la cara de uno de los cubos, d^3 y debajo el número 1000. Sobre una cara de los prismas blancos cuya cara cuadrada corresponde al cubo blanco d^2u y debajo 100. En los otros prismas, que tienen la sección cuadrada igual a las caras del cubo gris, (y que son también grises) escribiremos n^2d y debajo 10. Finalmente sobre el cubo gris u^3 y debajo el número 1.

El material así preparado nos dá la razón de cada fase del desarrollo del cálculo. Es aquel, puede decirse, la representación cúbica analizada y precisada según las jerarquías decimales del número del cual quiere extraerse la raíz. Y al propio tiempo representa la fórmula algebraica en su totalidad, también dispuesta ésta bajo la apariencia de un verdadero cubo, que se puede descomponer y reconstituir para analizar su disposición, y cuyas partes pueden también ser colocadas en fila, una junto a otra, en el mismo orden de la fórmula algebraica.

El *cubo-guía* se le puede comparar al cuadrado-guía que sirvió para la averiguación de la raíz cuadrada. Aquel dibujo geométrico que representaba en las subdivisiones del cuadrado, el análisis del número en sus valores jerárquicos, (con la reducción de todos a la unidad) servía después de guía a un trabajo con las perlas, para su colocación sobre la mesa de operaciones. También para este ejercicio más elevado se ha preparado otro material que permita la averiguación de la raíz cúbica, no por medio del cálculo, sino por una construcción efectuada con objetos. Esta tiene como elemento en vez de la perla el pequeño cubo unidad. Un cubo de madera de un centímetro de arista (fig. 241). Pero siendo imposible construir cada vez cubos y prismas con cubitos sueltos, se han preparado los cubos de los números 2 al 25 (que tienen las mismas dimensiones de los cubos primitivos de la Torre Roja) que tienen dibujados con líneas, sobre todas sus caras, pequeños cuadrados de un centímetro de lado, de modo que cada cubo tenga la apariencia de una acumulación de cubos unitarios. Además, los cubos de los distintos números están pintados de diferentes colores, como los bastoncillos de perlas, que indican las cifras 1, 2, 3 .... 9. Además de estos nueve cubos descritos se ha preparado también un material de chapas que, teniendo el espesor de un centímetro, esto es, del cubo unidad, representan según el número de cubitos con que parecen construídos, los cuadrados de 2, 3, 4, 5 .... 9, los cuales están pintados del mismo color que el cubo a que pertenecen. Las distintas chapas pueden superponerse y constituir

prismas de varias alturas y estando agujereadas por el centro se pueden mantener unidas gracias a varillas metálicas que forman parte del material. También los cubos tienen un orificio central en las tres caras adyacentes que sirve para fijar las prismas.

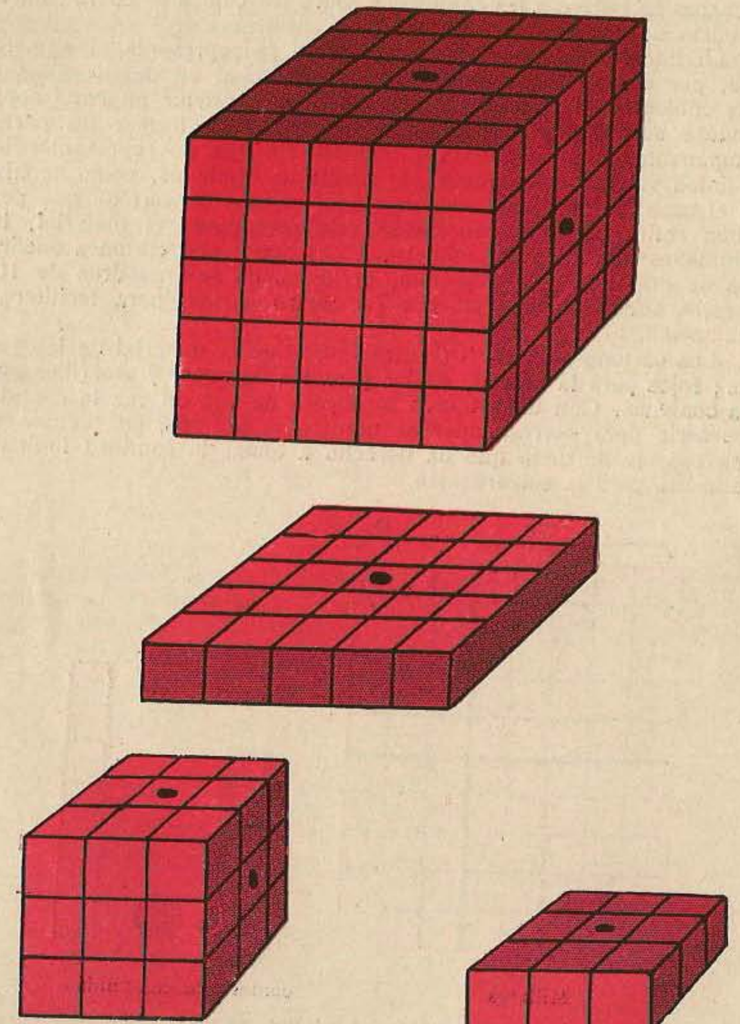
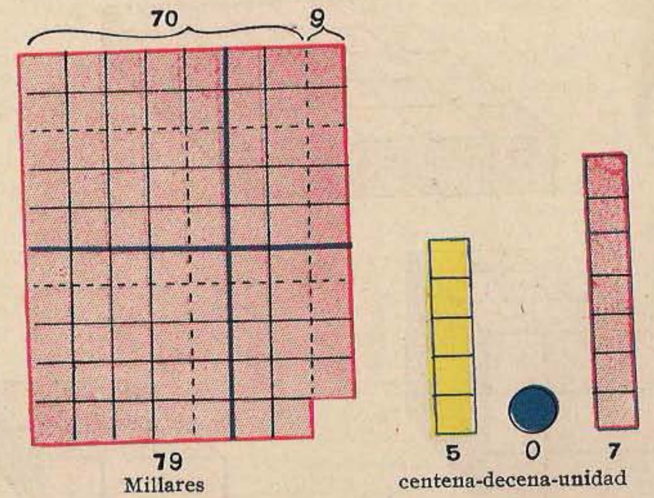


Fig. 241

No hay que confundir el cubo guía, que traduce geométricamente una fórmula algebraica, esto es, un hecho general y constante, con el *material de la raíz cúbica* que sirve para proceder a un cálculo aritmético determinado y efectivo, por medio de objetos que representan cuantitativamente símbolos numéricos. El material de cubos y chapas se refiere a las cantidades sobre las cuales se opera : hacen el oficio de un verdadero material de construcción.

Lo interesante ahora es, saber cómo se representa el número. Sea, por ejemplo, el número 79507, del cual se desea hallar la raíz cúbica. Con aquella cantidad se debe *construir un cubo* separándose sucesivamente cuanto se necesita para formar las partes componentes que después van unidas. En vez de representar los distintos valores del número por medio de símbolos, como se hizo en el caso de las perlas, tenemos aquí «bonos de cartón» que permiten retirar del almacén donde está acumulado el material, las cantidades indicadas del número. Estos bonos son cartones cuadrados de 600 unidades cada uno, divididos en seis cuadros de 100 y éstos subdivididos a su vez en cuatro partes, para facilitar la evaluación.

Los cartones son de 3 colores igual que el material de las perlas ; rojos para la unidad, azules para las decenas, y amarillos para las centenas. Con unas tijeras se separa de vez en vez la cantidad necesaria para corresponder al número y así éste se prepara en una especie de bono que dá derecho a tomar la cantidad limitada, necesaria para la construcción.

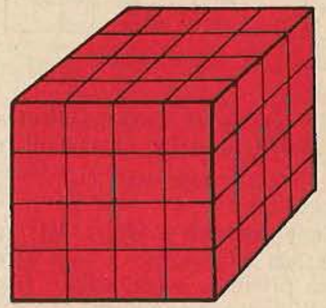


Preparación del número 79.507

Fig. 242

Se llega, pues, con las cifras a establecer el cubo que es centro angular de toda operación. En este caso es el cubo mayor comprendido en 79 : el cubo de 4.

Por lo que al bono se refiere, si hemos de operar con orden, separaremos del 79, tantos cuadraditos de 4 como sean necesarios para constituir el número correspondiente al cubo de 4 quedando de este modo un residuo de 15. Mientras el bono mayor queda reducido a un residuo, hemos adquirido un cubo que es centro de la construcción.



El cubo adquirido con los bonos

Fig. 243

Aquel residuo de 15 millares, se debe ahora cambiar por 150 centenas. Arrojaremos pues el residuo para tomar de una hoja de otro color (amarillo) 150 unidades que unidas a las 5 ya existentes dan un total de 155.

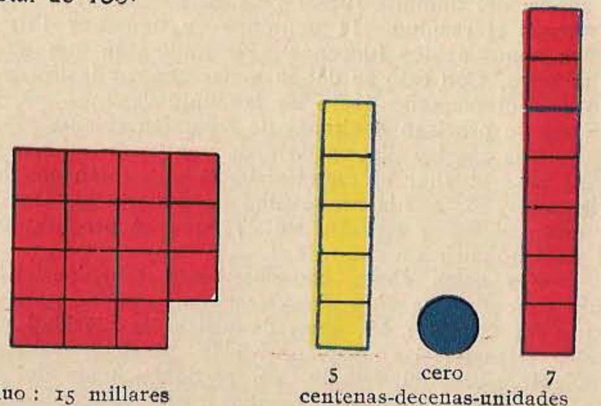
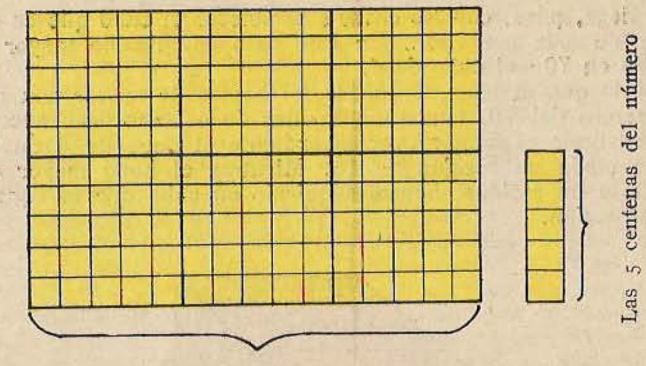


Fig. 244 (1



150 centenares correspondientes al resíduo anterior de 15 millares

Fig. 244 (2

Con éstas se tiene derecho a tomar del material para construir, 3 prismas ; las que son adyacentes a tres caras contiguas del cubo ya determinado. Las prismas, pues, deben tener una cara cuadrada de cuatro, pero ¿cuál debe ser su altura? He aquí la *incógnita*. Se deberán superponer sobre las tres caras del cuadrado, tres chapas de espesor *uno* y continuar del mismo modo mientras que el bono de las centenas nos permita tomar material. Como se ve, contando los cuadraditos en el dibujo, es posible tomar 3 veces las 3 chapas de 4^2 y queda un residuo de 11 centenas.

El 3 es la segunda cifra de la raíz.

Las prismas pues, resultan iguales a $4^2 \times 3$. Así se ha hallado la raíz cúbica del número 79507 que es $\sqrt{79507} = 43$

Arrojemos el residuo—11 centenas—y tomemos 110 cuadraditos de los bonos azules (decenas). He aquí a lo que quedó reducido el número. Con esto se deben tomar chapas destinadas a tomar contacto con el pequeño resto de las unidades que es 3^3 y para cada prisma se precisan 4 chapas de tres. Un prisma $= 3^2 . 4$.

Si cortamos con las tijeras, de cada vez las fracciones del abono necesarias para obtener el material hasta que estén construídos los tres prismas $3^2 . 4$, queda un residuo de 2 decenas. De este modo se encuentra al fin la cantidad de 27, que es precisamente lo suficiente para adquirir un cubo de 3.

Los bonos están ahora completamente gastados. El material adquirido con ellos ha sido el exactamente preciso para componer las partes del cubo de 43. Para demostrar la claridad y la ayuda que presta el material en esta operación, se debe trabajar con él, independientemente del cálculo, sin preocupaciones del fin a que conduce. Entonces el cálculo resultará una simple escritura, un ejemplo práctico.

Trabajando pacientemente en la construcción del cubo, colocando chapa sobre chapa, el niño realiza una labor descansada e interesante. Es para él una manera de conducir su pensamiento a través de los campos del álgebra y entre cálculos considerados hasta hoy inaccesibles a su inteligencia. Pequeño obrero de la inteligencia, se asemeja casi a un carpintero en su taller ; mas a poco se verá al niño entrar en el puro campo de la abstracción, mirando las fórmulas algebraicas como una guía para seguir los complicados cálculos aritméticos de la extracción de raíces cúbicas, y todo ello, con la seguridad de un vidente que ha penetrado en lo invisible.

EL CALCULO. — Se puede escribir la operación aritmética como un apunte, como un recordatorio de la labor realizada utilizando toda esta preparación.

Sea el mismo número 79507 del cual se quiere extraer la raíz cúbica. La primera operación es la de dividir el número en grupos de tres, comenzando por la derecha 79.507. Este debe tener una raíz de dos cifras, decenas y unidades, cifras ambas positivas.

Es el 79 quien debe dar la cifra de las decenas y, para ello, precisa averiguar cual es el número cuyo cubo se aproxima lo más posible al 79 sin superarlo.

La tabla indica $4^3 = 64$.

$5^3 = 125$

La cifra de las decenas es pues 4.

La operación se puede plantear con este comienzo.

$\sqrt[3]{79.507}$	4
64	$4^3 = 64$
15	.... (sigue)

El 79 no es cubo de 4 sino que lo supera y por ello precisa calcular el resto, porque al proseguir, este resto tendrá que ser utilizado.

El resto es 15 millares que serán utilizadas como centenas. Por eso bajo el 5 que constituirá con los 15 millares precedentes, 155 centenas. Ahora se precisa probar cuantas veces cabe en este número el triple del cuadrado de la primera cifra de la raíz. Para ello se divide 155 por 3, $4^2 = 3.16 = 48$. El cociente dá el número 3 que es la *segunda cifra de la raíz*. Así, la raíz, que debía ser de dos cifras, ha sido hallada.

El resto de la operación es un complemento, un relleno o una prueba. Precisa, primeramente, sustraer de 155 una cantidad igual a 3 veces el cuadrado de la primera cifra multiplicado por la segunda (los tres prismas) y después operar con el resto resultante : 110. A esto hay que restar el triple producto del cuadrado de la segunda cifra de la raíz por la primera, 3 (3^2. 4) = 3 (9,4) = 3,36 = 108. El resto son dos decenas que unidas a las 7 unidades, constituyen 27 unidades. De éstas hay que restar el cubo de la segunda cifra 3^3, que es precisamente 27.

1.ª parte averiguación	$\sqrt[3]{79507}$	43
	64	$4^3 = 64$
	155 . 48 = 3	$4^2 \times 3 = 16 \times 3 = 48$
2.ª parte De complemento o relleno	155	$3 \times 48 = 144$
	144	
	110	$3^2 \times 4 \times 3 = 9 \times 4 \times 3 = 36 \times 3 = 108$
	108	
	27	$3^3 = 27$
	27	
	0	

Fig. 245

Veamos otro ejemplo. Se quiere hallar la raíz cúbica del número 421875.

Dividamos primero el número en grupos de tres cifras 421.875.

La raíz es de dos cifras : decenas y unidades positivas.

El grupo de los millares, 421, contiene la cifra de las decenas que se halla consultando la tabla :

421 — 343 = 78

$7^3 = 343$

$8^3 = 512$

Luego la cifra de las decenas es 7.

Prepararemos el número usando el material de cartón de los bonos y después de haberle privado, poco a poco, de los necesarios cuadrados de 7, llegaremos al residuo de los millares o sea 78. Una vez en este punto la operación se puede recoger del material de madera un cubo de 7 sobre el cual deberá llevarse a cabo toda la construcción. El residuo de 78 millares se transforma en 780. Así los bonos forman ahora el número siguiente : 788 centenas, 7 decenas y 5 unidades. Con esta guía se construyen los prismas que contienen la incógnita y que tienen conocida, solamente, la base cuadrada : 7^2. Estos se construyen tomando sucesivamente 3 chapas de 7 para colocarlas en triple columna sobre las tres caras

adyacentes del cubo de 7. Cada vez que se repite esta operación se separan de los bonos tres cuadrados de 7, mientras existan. Las triples columnas pueden acumular cada una 5 chapas superpuestas ; el prisma buscado es pues 7^2. 5.

Este 5 es la segunda y última cifra de la raíz cúbica buscada. La raíz cúbica del número 421875 es 75. Para proseguir la operación utilizaremos el residuo de las 788 centenas, que es 53 y arrojándolo, cortaremos de una tabla o cartón de decenas 537 decenas, esto es, las provenientes de las 53 centenas más las 7 ya existentes. El número sobre el cual hemos de operar ahora es 537 decenas y 5 unidades. Este, sino se quitó demasiado, puede servir para la construcción de tres prismas que tengan como base el cuadrado de la segunda cifra de la raíz, 5, y una altura igual a la primera cifra, pues son los prismas que se adaptan a las tres caras adyacentes del cubo de las unidades y son de la altura del cubo dirigente. El número disponible no es sólo suficiente para ello, sino que deja aún un resto de 12 decenas. Estas, cambiadas por bonos de unidades, proporcionan el último número, exactamente justo con la adición de las 5 unidades ya existentes para recoger del material el cubo de 5. Y así se ha completado la construcción de un cubo de 75 = 421875.

Figura del *Cálculo Aritmético* 3 :

$\sqrt{}$ 421875	75
343	$7^3 = 343$
788 735	$3 \times 7^2 \times 3 = 147$ 788 : 147 = 5
537 525	$3 \times 7^2 \times 5 = 15 \times 49 = 735$
125 125	$5^2 \times 7 \times 3 = 21 = 525$
0	$5^3 = 125$

Fig. 246

De 421 (millares) se obtiene la primera cifra : la $\sqrt[3]{421} = 7$.

De las 8 centenas incrementadas con los restos precedentes se obtiene la segunda cifra.

Se han obtenido ya todas las cifras de la raíz.

Para completar la operación, precisa obtener de las 7 decenas tres prismas, que sabemos componer, porque están constituídos por d^2u, esto es, $5^2 \times 7 = 525$.

Finalmente precisa obtener de las unidades su raíz $\sqrt[3]{125 = 5}$.

LA RAIZ TRINOMIAL

LA RAIZ TRINOMIAL

La extracción de una raíz cúbica de tres términos, no se puede considerar como si fuera sencillamente la continuación de la raíz de dos términos. Porque está relacionada con un cubo trinomial que, en su construcción, es mucho más complicado que el binomial.

En efecto, las fórmulas algebraicas son:

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$ en el binomial y

$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$ en el trinomial.

Es pues, indispensable, volver al cubo trinomial en su propia construcción, y también a su fórmula algebraica.

El material del cubo trinomial contiene la clave del procedimiento necesario para el cálculo, pero, antes hay que estudiarlo.

a, cubo mayor, es un cubo de 100.
b, cubo mediano, es un cubo de 10.
c, cubo menor, es un cubo de 1.

Es decir, que la longitud de las aristas respectivas está determinada en 100, 10, 1: centenas, decenas y unidades. Por esto los números que se derivan de dicha evaluación los escribiremos sobre carteles separados que se reservan para cada grupo de objetos iguales.

Algebraicamente usamos otros del alfabeto que se afinan a este concepto: c = 100, d = 10, u = 1.

El caso general, ya estudiado en algebra, aquí se especifica en una ampliación que sirve de clave para un cálculo numérico.

Cada trozo va designado según dicha aplicación alfabética y va, también, calculado.

$$
\begin{array}{rclclcll}
c^3 & = & 100 & \times & 100 & \times & 100 & = 1.000.000 = c^3 \\
c^2\,d & = & 100 & \times & 100 & \times & 10 & = 100.000 = c^2\,d \\
c^2\,u & = & 100 & \times & 100 & \times & 1 & = 10.000 = c^2\,u \\
d^3 & = & 10 & \times & 10 & \times & 10 & = 1.000 = d^3 \\
d^2\,c & = & 10 & \times & 10 & \times & 100 & = 10.000 = d^2\,c \\
d^2\,u & = & 10 & \times & 10 & \times & 1 & = 100 = d^2\,u \\
u^3 & = & 1 & \times & 1 & \times & 100 & = 100 = u^3 \\
u^2\,c & = & 1 & \times & 1 & \times & 1 & = 1 = u^2\,c \\
u^2\,d & = & 1 & \times & 1 & \times & 10 & = 10 = u^2\,d \\
c\,d\,u & = & 100 & \times & 10 & \times & 1 & = 1.000 = c\,d\,u
\end{array}
$$

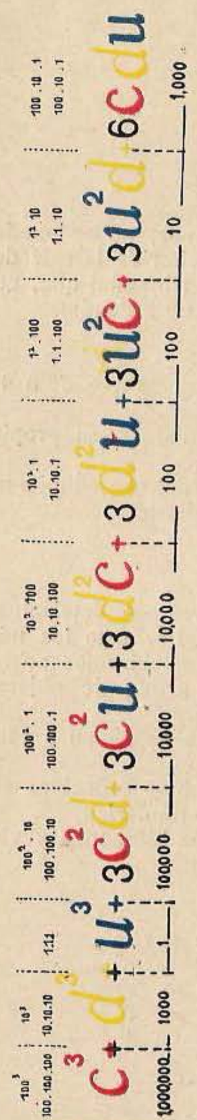


Fig. 247

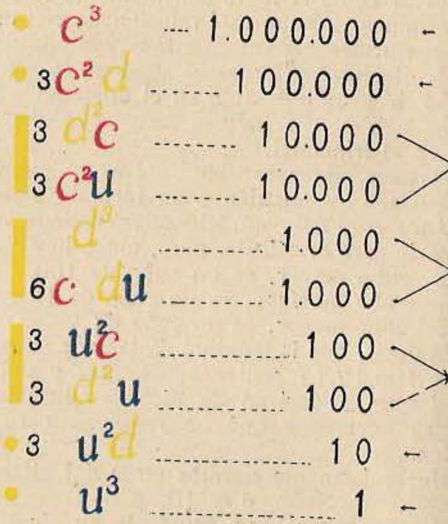


Fig. 248

Entretanto, el orden de los objetos o trozos, componentes, viene designado por su valor decimal. Pongámoslos en orden según estos valores y, al hacerlo, surgen ulteriores agrupaciones que no se manifestaban en la simple fórmula algebraica, porque trozos u objetos que tienen diversa representación algebraica poseen el mismo valor.

1.000.000	....	c^3
100.000	....	$c^2\,d$
10.000	....	$c^2\,u$
10.000	....	$d^2\,c$
1.000	....	d^3
1.000	....	$c\,d\,u$
100	....	$d^2\,u$
100	....	$u^2\,c$
10	....	$u^2\,d$
1	....	u^3

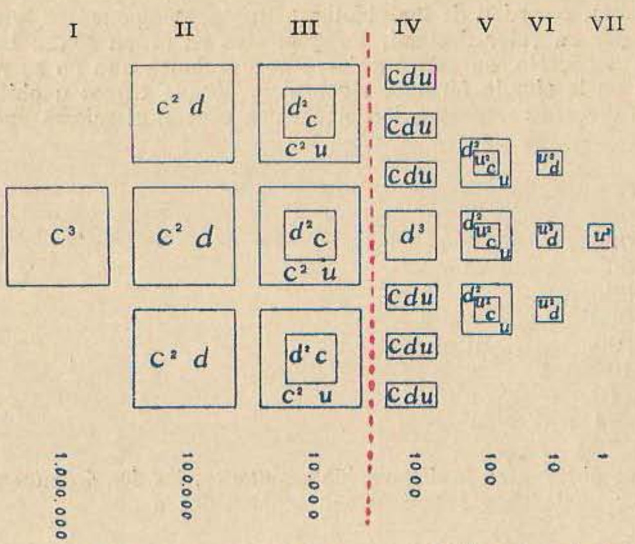
Como se observa en la disposición resultante, los dos órdenes extremos están aislados y los otros son iguales dos a dos.

1.000.000	c^3
100.000	$c^2\,d$
10.000	$c^2\,u$ — $d^2\,c$
1.000	d^3 $c\,d\,u$
100	$d^2\,u$ — $u^2\,c$
10	$u^2\,d$
1	u^3

Esto conduce a ordenar los objetos de un modo especial y necesario, que corrcspnde a las jerarquías del número, del cual, hay que extraer la raíz, y cada grupo de objetos de igual valor representa una parte determinada del número que, en bloque, correspondería al entero cubo trinomial.

	millones	centenas de millar	decenas de millar	millares	centenas	decenas	unidades
(número)	1	1	1	1	1	1	1
(cubo)	c^3	$3c^2d$	$3c^2u$	d^3	$3d^2u$	$3u^2d$	u^3
			+	+	+		
			$3d^2c$	6sdu	$3u^2c$		

El material, pues, se puede disponer en el siguiente orden :



Partes esenciales de la raíz cúbica

Partes secundarias de relleno

Fig. 249

Ante todo, el cubo mayor c^3 (1.000.000) que es el centro de construcción, el conductor de todo su séquito y, después, sus tres principales satélites c^2d.

En tercer lugar, se deben poner dos especies de objetos que representan ambos el 10.000, es decir, $3c^2u$ y $3d^2c$ y siendo c^2 más ancho que d^2 pondremos como base un c^2u (bajo como u) y encima el prisma estrecho y alto: d^2c.

En la fila siguiente ( ) se colocan: d^3 y sus prismas c.d.u. que tienen como él, el valor de 1000. A continuación los seis prismas de base cuadrada d^2u y u^2c que se pueden superponer porque el cuadrado d^2 es mayor que u^2.

A esto sigue el penúltimo grupo de $3u^2d$ con el valor de 10 y finalmente la unidad u^3.

De este modo el material queda alineado según siete valores:

1
10
100
1000
10000
100000
1000000

Este agrupamiento de sólidos geométricos hecho a base del sistema decimal, representa la guía del cálculo.

Para construir el cubo trinomial, precisa comenzar por 3^3 y disponer alrededor de este objeto, punto de partida, los grupos que representan el mismo valor.

Así, pues, primeramente c^3 (1000000).

Después el grupo de 100.000: $3c^2d$ (lo que constituye el procedimiento de la raíz cúbica de 2 cifras) y a continuación los objetos del grupo de 10.000 o sea $3d^2c + 3c^2u$.

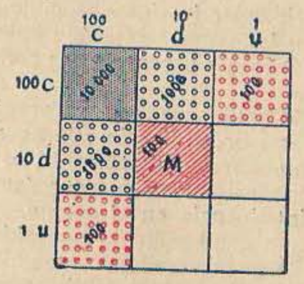
Siguiendo la construcción, se obtiene la disposición ya vista, esto es: los tres prismas $3c^2d$ se colocan sobre tres caras del cubo superponiéndose a ellas, según c^2 y tocándose en un vértice de c^3. De este modo se obtiene una prolongación de la arista c, esto es c + d, como hemos visto ya en el estudio de la raíz cúbica de dos cifras.

El procedimiento que conduce a colocar los sucesivos valores de 10.000 es más complicado, porque consta de dos partes: una $3d^2c$ que se refiere a *d* y *c* y la otra $3c^2u$ que introduce el tercer término *u*.

En este conjunto hay pues una parte de relleno y otra, en cambio, que conduce a hallar la tercera incógnita de la raíz, *u*, completando así la arista del cubo trinomial que se quiere construir: c + d + u.

Al llegar a este punto, puede servir de ayuda el recordar los procedimientos relativos a la extracción de la raíz cuadrada trinomial.

También en los cálculos preparatorios sobre el cuadrado, cuando se trató del cálculo de la extracción de la raíz cuadrada, fué necesario al llegar al trinomio cuadrado «rellenar un espacio entero» un «espacio muerto» M, antes de colocar las perlas que eran útiles para encontrar el tercer término de la raíz (c).



M: parte muerta, parte de relleno que hay que eliminar antes de buscar la incógnita

Fig. 250

Después de esto existen muchas figuras; todas aquellas situadas en la parte inferior de una diagonal compuesta de cuadrados, que no guardan relación alguna directa con las cifras de la raíz. Diremos, pues: existe un *espacio para relleno que el número debe cubrir* sin utilidad, por lo que a la raíz se refiere, al que llamaremos «espacio muerto, absorbente».

Indudablemente se procede de tal modo en forma opuesta a la matemática generalmente seguida. Aquella conduce, por excelencia, a la abstracción. Y la primera objeción que se presenta en el campo educativo de la psicología infantil, es que «precisa conducir la mente del niño hacia la abstracción». Cuando el niño se ve rodeado de tanto material aritmético, la objeción más corriente es, que se liga demasiado a la materia la inteligencia infantil, con lo cual, se retarda o impide, tal vez, el que llegue a la abstracción.

El método de «materializar la abstracción» para hacer accesible al niño un camino que, de otro modo, le estaba vedado, parece, más bien, una contradicción.

Pero la abstracción en sí misma es, no sólo una cualidad propia de la inteligencia que tiende a «abreviar» con la idea abstracta todo procedimiento material, sino también una tendencia psíquica que, haciendo «abandonar» los hechos materiales, y por ello limitados, permite «crear» un mundo de concepciones «irrealizables»; el mundo real de una creación humana, más allá de la materia y de sus limitadas relaciones.

En este sentido debe existir un «límite», bien claro, de lo que se puede materializar y de aquello que «solamente existe en la abstracción».

Un esfuerzo hecho en el sentido de materializar la abstracción es, sin duda, un trabajo de la inteligencia conducente a este límite. Distíngase *el ser y el no ser.*

Muchas veces, particularmente con los niños, se llama *allá* lo que en cambio es *acá,* pero que requiere una indagación si ha de contrastarse. De ese modo, la ciencia positiva ha colocado hechos naturales en muchos seres vacíos del conocimiento humano que estaban colmados con la idea de lo sobrenatural.

Todo lo desconocido se tiende a relegarlo entre lo «incognoscible». Y se habla a los niños de «abstracción» en la misma forma que entre pueblos salvajes se hablaba de Dios refiriéndose a casos y cosas completamente naturales.

El ejercicio formativo de la mente infantil, que por su propio carácter tiende a las cosas *vagas,* debe consistir en ligarlo a lo «concreto», todo lo posible, y uno de los caminos más utilizables en este sentido es, precisamente, el de los estudios matemáticos, porque éstos pueden penetrar en la formación de la inteligencia en sí misma.

Lo del cuadrado ayuda, por analogía, a contemplar la necesidad de cosiderar un «espacio muerto» que hay que rellenar, también aquí, *antes* de alcanzar la tercera incógnita de la raíz cúbica.

Es esta la dificultad que se encuentra, y que hace diferenciar la extracción de una raíz cúbica de dos cifras, de una de tres.

Es evidente que, colocados los trozos del tercer grupo en la construcción del cubo trinomial, se ha llegado a determinar la arista completa $c + d + u$ que corresponde a la raíz.

Dichas partes son, por esto, las necesarias para hallar la *raíz cúbica.*

A esta construcción parcial que representa un grupo de forma armónica que llamaremos «el monumento» de la raíz, concurren solamente diez trozos: c^3, $3c^2d$, $3d^2c$, $3c^2u$, de los veintisiete trozos necesarios para completar la construcción que se refiere a la averiguación de las incógnitas de la raíz, y otra, que es de simple relleno o complemento, la cual, se convierte en prueba de la exactitud de la raíz calculada.

El hecho de construir el cubo trinomial, recogiendo, de vez en vez, todos los componentes del grupo de un determinado valor, indica el procedimiento del cálculo; el cálculo parte del número (los valores alineados según las jerarquías decimales) y efectúa continuas «sustracciones» que se suceden una a otra, descendiendo la escala de valores hasta las unidades. Pero, al llegar a las *decenas de millar,* la raíz cúbica ya está hallada; la continuación es la prueba de que el cálculo fué exacto. Ahora los trozos del cubo trinomial guía, tienen la misión que tenía *el dibujo de los cuadrados-guía* para la extracción de la raíz cuadrada. Tratándose de *volúmenes,* solamente objetos movibles y superponibles pueden actuar como guía, porque su dibujo no podría ayudar prácticamente. Ahora, con el material geométrico guía, se va por una parte construyendo el cubo, mientras en el cálculo, se ejecutan todas las operaciones que conducen a la extracción de la raíz cúbica de un número.

Sin embargo, mientras en la operación con el material se va construyendo el cubo con la sucesiva agregación de partes, en la que se efectúa con cifras se van «restando» las cantidades correspondientes del número dado.

El cubo-guía, como también el cuadrado-guía, reducen a 1 todas las partes componentes, bien sea la arista o el lado; 1 que se refiere a los distintos órdenes jerárquicos decimales que están representados.

En cambio, la ejecución de un cálculo se refiere a un número que puede tener más de una unidad en cada lugar. Por ejemplo, sea el número 647.214.625 del cual se quiere extraer la raíz cúbica; en el lugar del 1 de la guía tiene dos centenas de millar, cuatro millares, etc.

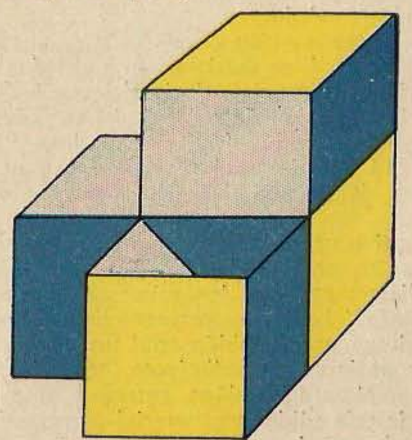
El cálculo positivo es, pues, una aplicación positiva a la guía que *indica* solamente los procedimientos. La parte positiva puede ser calculada inmediatamente con los números, como se verá en la descripción detallada del cálculo, correspondiente al número precitado.

Pero, si se desea usar también aquí un material que haga más claro el lento y paciente procedimiento, tan educativo y tan útil, como palestra mental para los niños, entonces, se puede utilizar para la extracción de la raíz cúbica un material constructivo, semejante al de las perlas, usado para la extracción de la raíz cuadrada; el mismo usado ya para la extracción de la raíz cúbica de dos cifras, es decir, «bonos» por la ejecución numérica y cubos de diferentes colores, capas cuadradas, y algunas veces, otro material suplementario, para construir prismas con las tres aristas diferentes (abc). El material constructivo permite un ejercicio demostrativo, particularmente para diferenciar aquellas operaciones que conducen a hallar «las incógnitas» (las cifras de la raíz) que constituyen una mínima parte del cálculo y son *todas uniformes partiendo del triple cuadrado de la primera cifra,* de las otras operaciones, mucho más numerosas, pero, que no tienen ninguna incógnita.

En efecto, para las primeras operaciones, precisa *estratificar* con capas cuadradas correspondientes al primer cubo (que da la raíz de las centenas) tres caras de éste, mientras haya material disponible en relación con todas las estratificaciones (aquí se trataría de dos de ellas, la que conduce a la averiguación de las decenas y la que conduce a la averiguación de las unidades). En cambio, todas las otras partes se resuelven con la composición de los prismas, cuyas aristas son ya conocidas, y que es necesario saber colocar recordando el dispositivo de las partes en el cubo-guía.

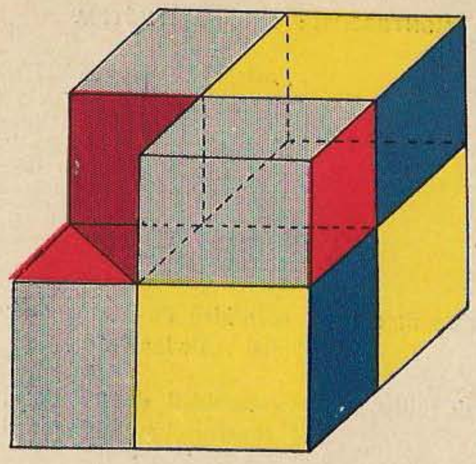
Para distinguir los materiales hemos preparado una torre de colores, donde 1^3, 2^3, etc., 10_3 están pintados con colores diferentes, como sucedía con los cubos de perlas, e igualmente los listones y las planchas preparados para facilitar la construcción de los otros trozos ; las superposiciones de capas de cubitos, están también pintadas, en analogía con los cubos fundamentales.

El trabajo, que sería largo de describir, se puede comprender por el cálculo que exponemos y debe ser enseñado prácticamente para dar a la demostración, no sólo su limpia claridad, sino para realizar de este modo un ejercicio formativo que conduce al razonamiento y a una actividad motriz, lenta y reposada.



$$c^3 + 3c^2d$$

Fig. 251



$$c^3 + 3c^2d + 3d^2c$$

Fig. 252

relleno

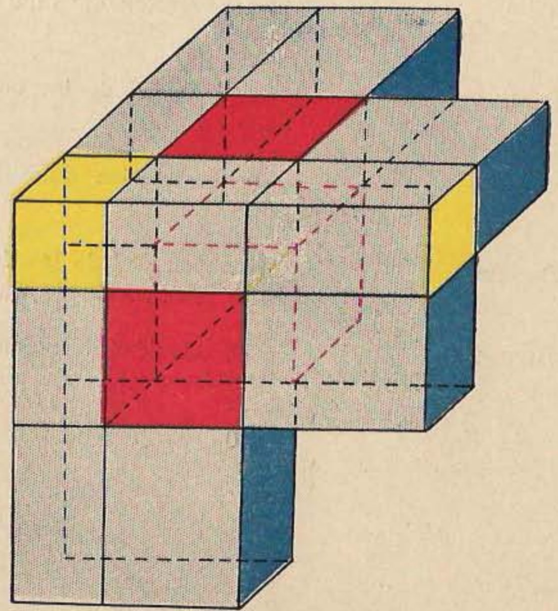


Fig. 253

$c^3 + d^3 + u_3$

Millares	647.214.625
	512 se resta de c_3
Centena de millar	1352 (cantidad de los centenares de millar).
	1152 (son restados $3c^2d$).
Decenas de millar	2001 (cantidad de las decenas de millar).
	864 (sustracción preparatoria $3d^2c$).
	1137 (segunda sustracción $3c^2u$).
	960 fin de la 1.ª parte.
Millares	1774 (cantidad de los millares).
	216 (sustracción d^3).
	1558 (sustracción de 6 c d u).
	1440
Centenas	1186 (cantidad de las centenas).
	540
	646 (sustracción de $3u^2c$).
	600
Decenas	462 (cantidad de las decenas).
	450 (sustracción de $3u^2d$).
Unidades	125 (cantidad de unidades).
	125 (sustracción de u^3).
	0

c + d + u
8 6 5

$8^3 = 512$ (c^3); 8 (centenas de la raíz).
$3 \times 8^2 = 3.64 = 192$.
$1.352 : 192 = 6$ (decenas de la raíz).
$3\ (6^2 \times 6) = 3\ c^2d = 1.152$.

$3\ (6^2 \times 8) = 3d^2c = 864$.
$1137 : 192 = 5$ (unidad de la raíz).
$3\ (8^2 \times 5) = 3c^2u = 960$.

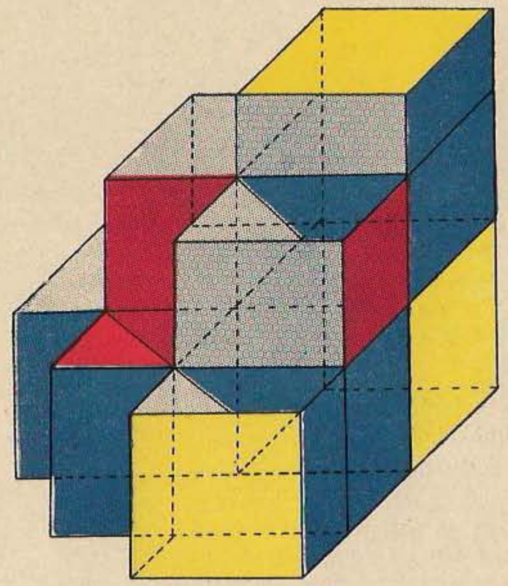
RELLENOS Y PRUEBA

$6^3 = 216$ (d^3).
$6\ (8 \times 6 \times 5) = 1440$ (6 c b u).

$3\ (6^2 \times 5) = 540$ ($3d^2u$).
$3\ (5^2 \times 8) = 600$ ($3u^2c$).

$3\ (5^2 \times 6) = 450$ ($3u^2c$).

$5^3 = 125$ (u^3).

(I) 

$$c^3 + 3c^2d + 3d^2c + 3c^2u$$

(I) Porción esencial que es el «monumento» necesario para hallar la raíz del cubo trinomial

Fig. 254

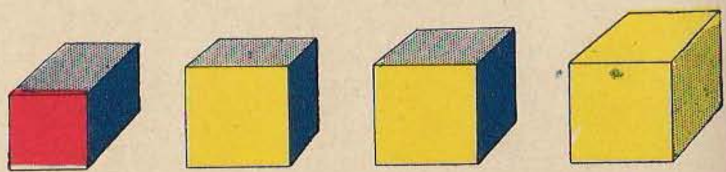


Fig. 255

PROCEDIMIENTO DIRECTO DEL CALCULO

Sea, pues, el número 647.214.625, el cual, se divide en grupos de tres cifras de derecha a izquierda, 647.214.625 ; sabiendo que del grupo de los millones (647) depende la cifra de la raíz correspondiente a las centenas. (Para facilitar los cálculos hay la tabla N, Figura 257).

El número se analiza útilmente del modo siguiente :

Millones	Centenas de millar	Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades
6.4.7	2	1	4	6	2	5
del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende
c^3	$3c^2d$	$3d^2c + 3c^2u$	$d^3 + 6cdu$	$3d^2u + 3u^2c$	$3u^2d$	u^3
de las cuales depende la parte esencial del cálculo, que descubrirá los tres elementos de la raíz : c, d, u.			de las cuales depende la parte secundaria del cálculo, de relleno y de prueba.			

Por el primer cálculo, se determina el cubo fundamental 8^3 que significa el cubo de las centenas, esto es, millones (se separa del material alineado c^3). Se ha quitado al número el equivalente de c^3 o sea $8^3 = 512$ y queda como resto 135, que se une a las centenas de millar, 2.

Las centenas de millar son en total 1352.

A las centenas de millar corresponden los tres prismas c^2b que precisa poder separar del número de ellos de que se dispone. Estos van distribuídos sobre las tres caras adyacentes del cubo de 8 y, por esto las cantidades numéricas correspondientes son $3 \times 8^2 = 192$.

Ahora bien, ¿cuántas veces pueden repetirse estas cantidades? Tantas como lo permita el número $1352 : 192 = 6$.

(Escojamos esta cifra, un poco inferior a cuanto podría dar materialmente el número, porque hay todavía mucho que dar hasta el fin del cálculo).

Restemos para ello del número 1352 la cantidad 192 repetida 6 veces que corresponde a los tres prismas.

$3c^2b = 3 \times (8^2 \times 6) = 1152$.

Separemos, pues, los tres prismas c^2b y coloquémoslos sobre el cubo base, de modo que todos ellos converjan sobre el mismo vértice en la forma conocida, como indican las figuras 251, 252, 253, 254 y 255.

En el cálculo numérico se debe, al propio tiempo, restar 1152 del número 1352.

Efectuándolo queda un resto, 200, que hace de sostén o apoyo de la próxima cifra, la de las decenas de millar.

El número total de decenas de millar es 2001.

Aquí hemos llegado a la «clave secreta». En efecto, el material correspondiente a las decenas de millar consta de dos elementos diversos : d^2c y c^2u. Uno de éstos contiene el elemento *u*, unidad, esto es, la tercera incógnita de la raíz. El otro, en cambio (d^2c), es extraño a la raíz, estorba las decenas de millar y, por lo mismo, hay que separarlo como «espacio muerto». El d^2c es conocido porque contiene los elementos de la raíz que ya fueron hallados, decenas y centenas, 6 decenas y 8 centenas.

Este es, pues, $6^2 \times 8$, pero siendo tres prismas, la cantidad total asciende a : $3d^2c = 3 \ (6^2 \times 8) = 3 \cdot (36 \times 8) = 36 \times 24 = 864$.

Este 864 debe ser sustraído a la cantidad de las decenas de millar y, al mismo tiempo, los tres prismas se quitan y se colocan sobre los precedentes, como se indicó en la construcción del «monumento».

Restando 864 de 2001 queda el número 1137, que es aquél del cual se deben quitar los tres prismas c^2u que contienen la unidad desconocida. Con dicha cantidad precisa repetir el trabajo ya efectuado para hallar *d*, es decir, colocar tantos estratos o capas de 8^2 sobre las tres caras c^2, caras, que son las mismas como cantidad, aunque se deben sumar los estratos a las caras c^2 de los prismas c^2d ya colocados. En el número tiene lugar idéntica reproducción del procedimiento usado para hallar *d*, esto es : $1137 : 192 = 5$.

La cifra radical de las unidades es 5 y la raíz, pues, ha *nacido*.

Se restan, pues los tres prismas c^2u y se disponen para completar la construcción del monumento que da por tres lados la arista completa $c + d + u$. En el número se resta al 1137 la cantidad correspondiente a $3c^2u$ o sea $3 \ (8^2 \times 5) = 960$.

Los números sucesivos no tiene más importancia que la de completar el relleno del cubo, el cual se efectúa separando poco a poco las partes remanentes que son todas conocidas.

El resto de 177 viene a integrar los millares, que son 4 formando el número 1774, al que hay que restar todos los elementos que pertenecen a los millares, que son : $d^3 + 6cdu$.

El d^3 es, en nuestro caso, $6^3 = 216$ y del resto se deben sustraer 6cdu, es decir, $6 \ (8 \times 6 \times 5) = 36 \times 40 = 1440$.

Del material se sacan d^3 y los seis prismas cdu continuando la construcción del cubo.

Del resto definitivo de los millares, 118, se pasa a componer el número de las centenas y bajando el 6 se obtienen 1186 centenas.

A este total hay que restar ahora los dos grupos $3d^2u + 3u^2c$.

$d^2u = 6^2 \times 5$ y por lo tanto $3d^2u = 3 \ (6^2 \times 5) = 36 \times 15 = 540$.

Restándolo de 1186 quedan 646 centenas aún disponibles, de las que hay que sustraer $3u^2c$, esto es, $3 \ (5^2 \times 8) = 25 \times 24 = 600$ y queda de $646 — 600 = 46$.

Las 46 centenas de resto van ahora a integrarse con el número de las dos decenas que se ha bajado formando 462 decenas.

De éste se resta ahora el solo grupo (penúltimo) de $3u^2c$, esto es $3 \ (5^2 \times 6) = 25 \times 18 = 450$ y se tiene $462 — 450 = 12$.

Al fin se ha llegado a las unidades que, juntamente con dicho resto, forman un total de 125, del cual, hay que quitar la cantidad u^3 o sea $5^3 = 125$.

Así se ha utilizado todo el material ; colocado el último elemento, el cubo trinomial es completo y tiene de arista $c + d + u$.

El número es el cubo exacto de 865 sin resto.

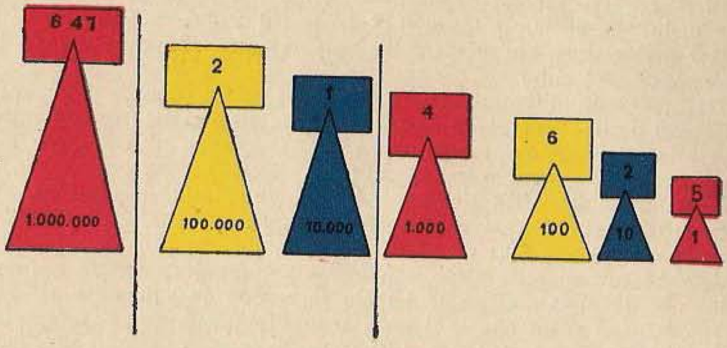
El trabajo con el material lleva a un análisis lento, acompañado por la construcción de objetos. En efecto, los varios elementos geométricos del trinomio cubo, se deben construir con planchas y, de vez en cuando, contar los pequeños cubos unitarios que los componen por medio de fáciles cálculos. La cantidad y el valor de las piezas a construir vienen indicados en *la guía* y determinados por medio de los «bonos».

Es indudable que trabajo tan paciente conduce a memorizar de modo inolvidable cada particular del cálculo, como también su sucesión, mientras las razones que inducen al cálculo mismo son aclaradas y fijadas con los actos mismos de ejecución.

No es posible ejecutar el trabajo con el material constructivo sin recurrir, también, al cálculo escrito, como ya ha sucedido en la extracción de la raíz cuadrada. Pero, el escrito que se acompaña a los objetos, analiza y separa las distintas partes del cálculo y elimina muchos particulares de éste, es decir, todos aquellos que vienen sustituídos por las construcciones.

OPERACION CON LOS NUMEROS

Primero, se prepara el número, escribiéndole en pequeños carteles del mismo color, que se colocan encima de objetos de forma piramidal de varias dimensiones.



8^3	1352	**2001**	1774	1186	462	125
865 cdu	$3c^2d$	$3d^2c + 3c^2u$	$d^3 + 6cdu$	$\mathbf{3d^2u} + 3du^2$	$3u^2d$	u^2

Fig. 256

Las distintas operaciones, se siguen en relación con el *número* correspondiente a cada orden jerárquico, como indica la figura, y de él se sustraen las cantidades de unidades precisas para la fabricación de los objetos que se componen, de vez en vez, en relación con los valores. Si a un punto de la construcción se precisan más unidades de las disponibles según el número, es necesario deshacerlo todo y volver atrás. ¿Dónde puede estar el error? Este puede estar solamente donde se trató de buscar «una incógnita». Esto es, donde se colocan sucesivamente capas estratificadas correspondientes a las caras del prisma cubo, sobre el cual, todo se edifica. En el caso de nuestro número, el error puede estar solamente en la estratificación de las capas de 8^2. Estratificaciones que se pre-

cisan únicamente en las operaciones correspondientes a la busca de *d* y de *u*, o sea, en correspondencia de 100.000 y 10.000.

El primer objeto hallado, el *cubo* de las centenas que se obtiene del grupo de los millones, es la primera piedra del monumento, en torno a la cual se dispone todo el resto; es precisamente el cubo inicial que se toma de la torre en la serie de los cubos de 1 a 10.

La ejecución material y lenta de todas las otras operaciones necesarias hace, casi, desanudar entre los dedos que trabajan, toda dificultad y esfumar las complicaciones aparentes en la nitidez de una simplicidad atractiva, que invita a la repetición del ejercicio.

En la labor constructiva pueden colaborar tres o más niños, pero tres de ellos son los obreros que componen los trozos iguales tres a tres, mientras los otros, pueden ser empleados en pequeños carteles que representan la cantidad, en torno a la cual, deberán desarrollarse las operaciones sucesivas.

EL MATERIAL ENSEÑA

En el procedimiento de calcular la raíz cúbica se tiene el ejemplo más claro del material *guía*, que enseña como podría hacerlo un maestro. Es el material quien conduce el cálculo paso a paso y da, al propio tiempo, la razón de cada particular del procedimiento, representado claramente las relaciones entre un número y su raíz cúbica. Este maestro enseña, dando a la *inteligencia* del discípulo la mayor satisfacción y empujándolo a probar y volver a probar, a repetir, una y otra vez, un ejercicio fascinador por su claridad y exactitud. He aquí un maestro siempre pronto, siempre paciente e inalterable, y dispuesto a repetir su demostración. Es verdaderamente un maestro que impresiona con su profunda enseñanza, que va analizando y descubriendo hasta llegar a la *raíz* del problema. El alumno no podrá jamás olvidar esta lección.

Verdaderamente, no es una «memorización» que quedó en él, sino, una *visión* que ha realizado en su mente, una construcción racional e indestructible. El discípulo posee, además, las claves secretas para recons'ituir el procedimiento, con sus propias energías mentales. Así la memoria se ha convertido en un proceso sintético sólidamente asegurado ; es como una planta viva, que aún cuando sujeta a perecer, deja las semillas que la puedan reproducir fresca y pujante.

El material de los pequeños cubos, se puede introducir en la ejecución práctica de un cálculo determinado a posteriori, es casi un «maestro de virtudes» morales, que enseña la «paciencia» y la «reflexión», el respeto escrupuloso «al orden en la sucesión de los trabajos necesarios», la «exactitud» en la construcción de los objetos, la «constancia» en ejecutar actos semejantes hasta el fin ; no ya por curiosidad, porque la mente guía la mano en casi todos estos trabajos, sino, por una energía ordenada y formadora del carácter, que se ha desarrollado y que anima a la ejecución, dando, en premio, calma y satisfacción interiores.

N	N^2	N^3	$3N^2$
1	1	1	3
2	4	8	12
3	9	27	27
4	16	64	48
5	25	125	75
6	36	216	108
7	49	343	147
8	64	512	192
9	81	729	243

Fig. 257

N	N^2	$3N^2$	N^3	$4N^3$	N^4	$5N^4$	N^5
1	1	3	1	4	1	5	1
2	4	12	8	32	16	80	32
3	9	27	27	108	81	405	243
4	16	48	64	256	256	1280	1024
5	25	75	125	500	625	3125	3125
6	36	108	216	864	1296	6480	7776
7	49	147	343	1372	2401	12005	16807
8	64	192	512	2048	4096	20480	32768
9	81	243	729	2916	6561	32805	58949

Tabla C

Fig. 258

REALIZACION

REALIZACION

Una materialización geométrica de la fórmula algebraica, relativa a la 4.ª y 5.ª potencia de un binomio, no representaría ya un medio necesario para aclarar el cálculo, ni mucho menos para abreviarlo y lograr aquella finalidad asombrosa de averiguar las altas raíces, esto es, aquellos números pequeños, pero, que son como un elemento primordial, y, multiplicados 4 ó 5 veces por sí mismos, dan un número enorme. Por ejemplo, descubrir que 28398341 está formado por un pequeño 73 que se enrosca 4 veces sobre sí mismo como una bola de nieve que crece prodigiosamente. Y que el número 1934917632 tiene un núcleo interno de 72 que, arrollándole 5 veces sobre sí mismo, lo forma.

Si se pudiese continuar materializando estas formaciones, y mostrarlas bajo forma de sólidos geométricos, compuestos de partes siempre más complicadas, como un organismo en evolución, acarrearía, sin duda alguna, un ejercicio mental de agudeza analítica que, concretado sobre objetos manuales, podría ser accesible a los niños.

He aquí, pues, cómo el problema recae ahora sobre *la construcción del objeto,* esto es, sobre lo que precedentemente nos sirvió de llave para abrir los secretos del número. En efecto, si los cuerpos sólidos no pueden exceder de la 3.ª dimensión ¿cómo representan la fórmula $a^4 + 4\ a^3\ b + 4\ b^3\ a + 6\ a^2\ b^2 + b^4$ dónde ni un solo término puede representarse materialmente? Ni las 4.ª potencias de a y b; ni la multiplicación de 4 por términos como $a^3\ b$ ó $b^3\ a$, ni el producto de dos cuadrados $a^2\ b^2$.

Esta imposibilidad se presenta en la fórmula algebraica reducida ya a su máxima simplificación. Pero, se podría *penetrar* en ella como se penetró en el número, para distinguir las cantidades que constituyen el objeto, de factores que indican simplemente una multiplicidad de los mismos objetos. Como sucede en la multiplicación, donde el multiplicando es la *substancia* y, en cambio, el multiplicador indica simplemente cuantas veces se debe repetir aquella substancia.

A tal fin seguiremos, de modo analítico, el paso entre la 3.ª y 4.ª potencia del binomio, acompañando el desarrollo con la *presencia* de los objetos referentes al cubo del binomio. Entretanto, para la construcción material, hay este concepto directriz; el cubo del binomio en su totalidad puede ser repetido varias veces (a + b veces) y alineado como se hizo para indicar las decenas de millar, esto es: 10^4, cuando se colocaron en línea 10 cubos de mil perlas. Esta aplicación puede constituir una directriz, porque el cuerpo, pasando de la 3.ª a la 4.ª potencia, puede extenderse sólo en longitud y no en el sentido de la anchura.

La fórmula del cubo del binomio

$a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a$

está compuesta de dos partes, que se refieren a las dos mitades del cubo, y cada una de éstas está constituída por 3 prismas apoyados en las 3 caras adyacentes de cada cubo.

$$a^3 + 3a^2b + b^3 + 3b^2a$$

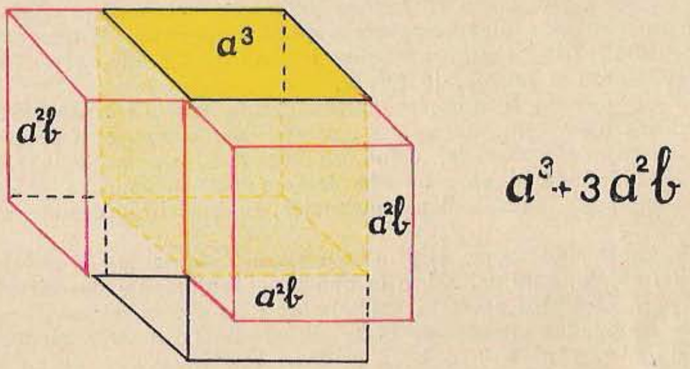


Fig. 259

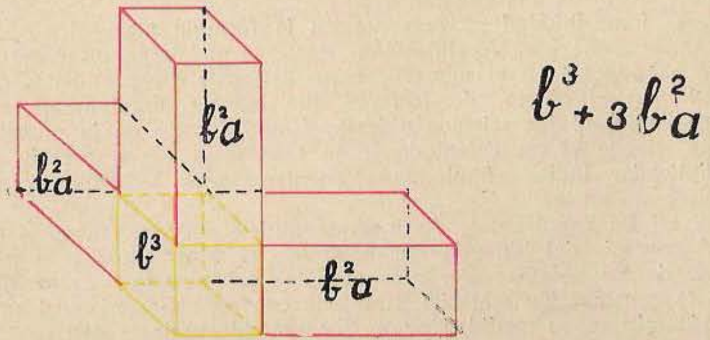


Fig. 260

En uno y otro caso hay dos prismas, colocados lateralmente y apoyando la cara no cuadrada sobre el mismo plano del cubo, y otro, en cambio, que se apoya en el cubo con la cara cuadrada y se eleva, o desciende perpendicularmente, con la cara rectangular. Se puede observar en seguida la importancia de esta deficiencia de posición, lo que no sería posible destacar con la sola fórmula algebraica.

Procedamos ahora a la multiplicación del cubo del binomio por el binomio mismo, sin eliminación de términos, o mejor, sin acumular en una suma términos iguales:

$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a)\ (a \times b)$.

y separando las partes, teniendo en cuenta los dos grupos geométricos dichos:

$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a) \times a$
$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a) \times b$

en la fórmula expresada de este modo, se pueden distinguir 4 partes que son los términos correspondientes a cada uno de los medios cubos

$(a^3 + 3\ a^2\ b) \times a$ $\quad$ $(a^3 + 3\ a^2\ b) \times b$
$(b^3 + 3\ b^2\ a) \times a$ $\quad$ $(b^3 + 3\ b^2\ a) \times b$

Ahora, los coeficientes a y b, por los cuales se multiplican los factores entre paréntesis, aun cuando puedan ser numéricamente idénticos a a y b, sólo indican *cuantas veces deben ser repetidos los factores internos*. Estos no se funden en la construcción de los objetos, como sucedería en la fórmula, cuando los cálculos están desarrollados; y donde a^3 se convierte en a^4, quiere decir: el mismo objeto con otra dimensión. El criterio de que todo objeto tiene 3 dimensiones, se impone como una situación límite, por debajo de la cual, no existen objetos, y por encima de la cual, pueden aumentar en cantidad y, combinarse variadamente, entre sí.

Partiendo ahora del *cubo* del binomio, indicaremos, con color diverso, los nuevos términos que se deben considerar como multiplicadores, dejándolos separados y distintos, de aquellos que indican el objeto mismo en sus dimensiones.

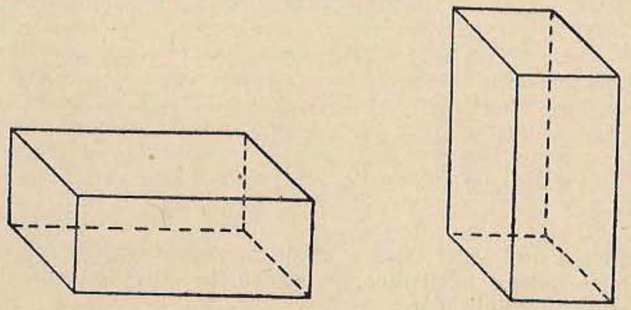


Fig. 261

PARTE I

Comencemos por la primera parte y demos a los términos genéricos *a* y *b*, valores numéricos, llamando a la Aritmética a tomar parte en la construcción, sostenida ahora, solamente, por el Algebra y la Geometría.

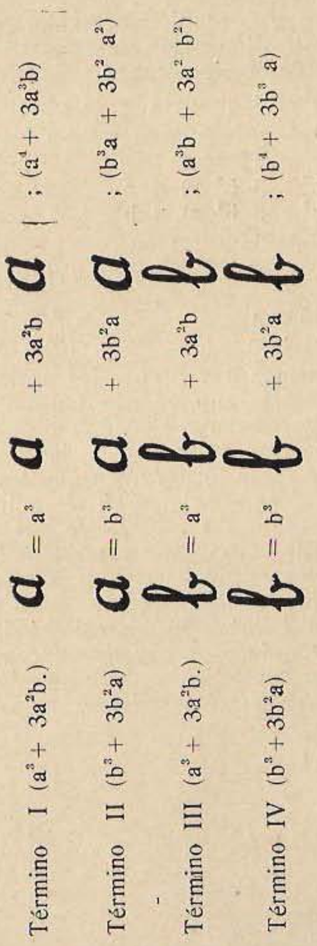


Fig. 262

Demos a *a* el valor 3, a *b* el de 2, conservando las letras para indicar los objetos existentes, y usando las cifras cuando tienen el carácter de multiplicador.

Ahora : $(a^3 + 3\ a^2\ b)\ a$, se puede analizar así :

$$(a^3 + 3\ a^2\ b)\ 3 = \begin{matrix} a^3 + 3\ a^2\ b \\ a^3 + 3\ a^2\ b \\ a^3 + 3\ a^2\ b \end{matrix}$$

Se trata, pues, de tomar tres cubos *a* y tres prismas a^2 b. Llevemos a término esta primera parte de la construcción, poniendo para su realización, también, el elemento medida. Esto, aunque no constituya el caso general, demuestra claramente la posibilidad de materialización de la cuarta potencia de cualquier binomio. Un cubo de 3 cms. de arista y 3 cubos de éstos uno al lado del otro. Si después los 3 cubos se quieren unir, constituyendo un solo objeto, resulta un prisma que corresponde al dato algebraico a^4.

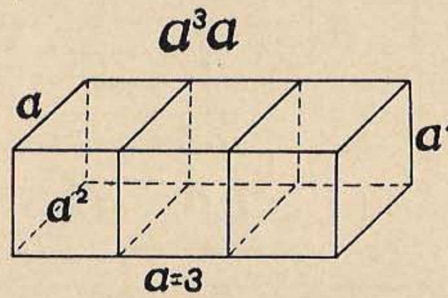


Fig. 263

Pasemos ahora a los tres prismas a^2 b. Construyendo el objeto con los valores establecidos, resultará un prisma de base cuadrada con las medidas : 3. 3. 2. Ahora se trata de tomar tres de estos prismas adyacentes uno al otro, como se hizo con el cubo. Aquí, sin embargo, entra el elemento *posición* del objeto.

Reuniendo tres prismas en un sólo objeto, pueden resultar dos formas esencialmente diversas, según se unan entre sí por la cara cuadrada o por la cara rectangular. El prisma que se apoya sobre el cuadrado se extiende en longitud, continuando su apoyo sobre la cara cuadrada y adhiriéndose por la cara rectangular.

El prisma que está al lado, pero en el interior, se apoya sobre la cara rectangular y se adhiere por la cuadrada.

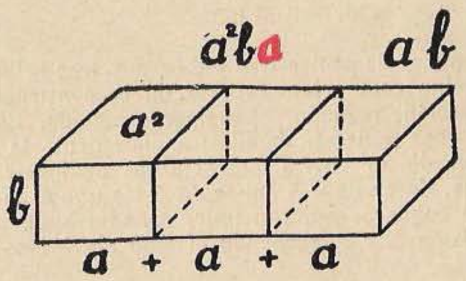
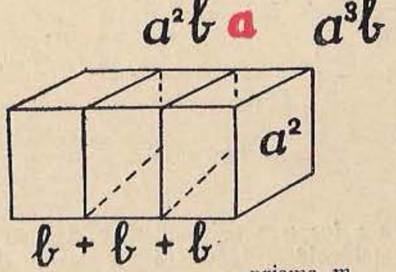


Fig. 264



prisma m

Fig. 265

El prisma que está al lado, pero hacia el exterior, en cuyo sentido no puede extenderse, se apoya y adhiere sobre las caras rectangulares. Ahora, si se une cada grupo en un solo objeto, los dos prismas *S* resultan idénticos pero distintamente apoyados; el uno sobre el cuadrado, como formando un techo y, el otro, sobre el rectángulo como si formase un muro (fig. 266). En cambio, *m* es esencialmente distinto de los otros dos.

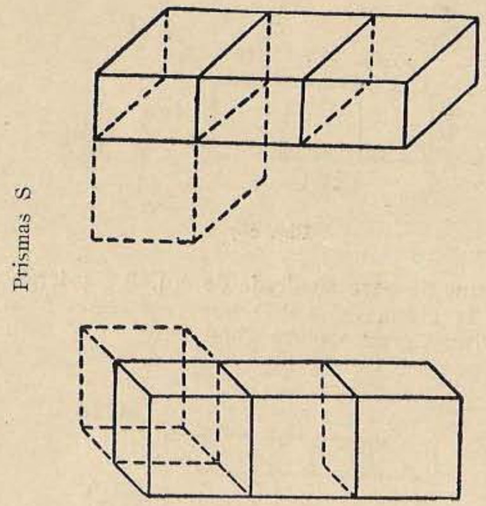


Fig. 266

Efectuando operaciones con los números de medida, resulta la igualdad de volumen de los tres prismas.

$$3.\ 3.\ 6 = 9.\ 6 = 54$$
$$2.\ 3.\ 9 = 6.\ 9 = 54$$

Con su construcción se ha realizado la primera parte, comprendida en la fórmula algebraica

$$(a^3 + 3\ a^2\ b)\ a = a^4 + 3\ a^3\ b$$

PARTE II

$(b^3 \times 3\ b^2\ a)\ a$

Las otras partes de la fórmula presentan análogas interpretaciones. Se pasa a repetir 3 veces el cubo de 2, e igualmente los tres prismas que le están unidos, y de cada grupo se forma un solo objeto,

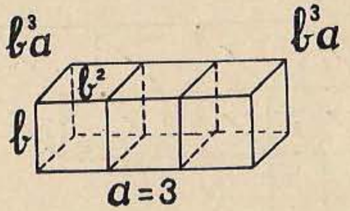


Fig. 267

esto es, un prisma de base cuadrada de cm. 2.2 y largo cm. 6 (esto es, tres veces la arista del cubo) que representa $b^3\ a$ y los tres prismas que forman grupos correspondientes a: $b^2\ a.\ a = b^2\ a^2$.

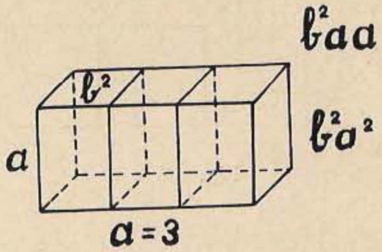


Fig. 268

Uno de éstos se adhiere por la base cuadrada y resulta distinto de los otros dos que se adhieren por las caras rectangulares y que son idénticos, aun cuando, de diversa orientación.

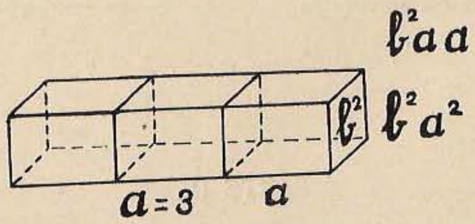


Fig. 269

Así queda traducida en objetos geométricos la segunda parte de la fórmula.

$$(b^3 + 3\ b^2\ a)\ a = b^3\ a + 3\ b^2\ a^2$$

PARTE III

Vamos ahora a las otras dos partes de la fórmula.

$$(a^3 + 3\ a^2\ b)\ b = a^3\ b + 3\ a^2\ b^2$$

En este caso $a\ b$ se traduce en el cubo de 3 repetido 2 veces, en un prisma que tiene las caras cuadradas iguales a a^2

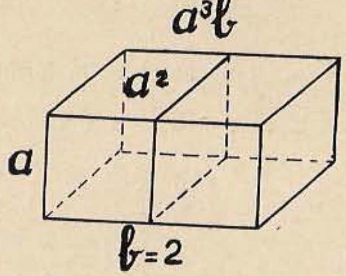


Fig. 270

$a^2\ b$ se distingue en 3 prismas que derivan cada uno de la unión de dos y realizando $a^2\ b.\ b = a^2\ b^2$, en dos formas esencialmente diversas, según que la adherencia tenga lugar por la cara cuadrada o la rectangular.

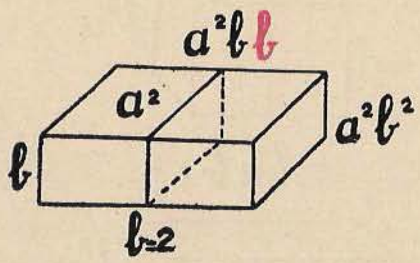


Fig. 271

Así se han construído los objetos que corresponden a la fórmula $a^2\ b + 3\ a^2\ b^2$.

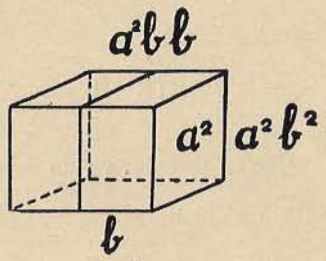


Fig. 272

PARTE IV

Pasemos ahora a la última parte de la fórmula

$$(b^3 + 3\ b^2\ a)\ b = b^4 + 3\ b^3\ a.$$

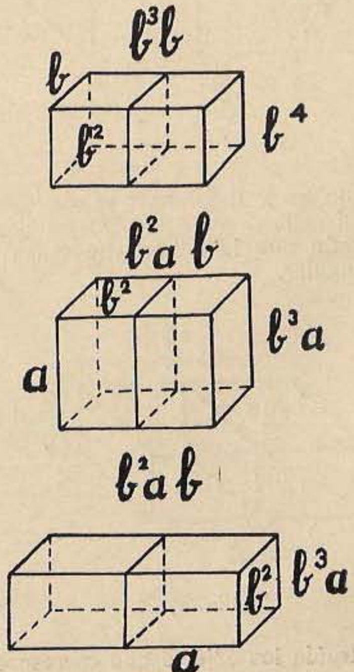
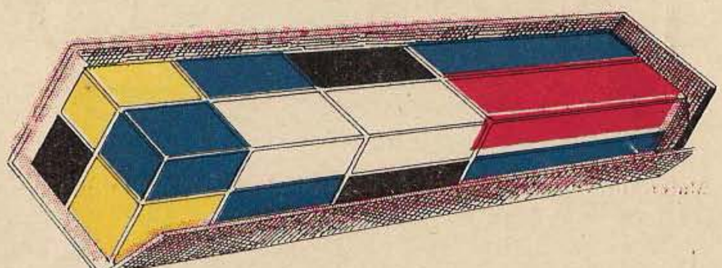


Fig. 273

El pequeño cubo de *b* igual a 2^3 está repetido dos veces y resulta un prisma que corresponde a las medidas 2. 2. 4 y con ésto se construye el objeto que corresponde a b^4. Hay, además. los tres prismas relativos al cubo de 2. que se deben repetir cada uno 2 veces. Estos. según se adhieran por la cara cuadrada o la rectangular, vienen a constituir dos formas esencialmente diversas; uno es 2.2.6 y resulta de dos prismas que se unen por la cara cuadrada. Los otros dos resultan 2.3.4 y son los que se unen por la cara rectangular. De esta manera se han construído objetos geométricos de forma diversa, pero todos prismáticos, que corresponden a la fórmula de la 4.ª potencia del binomio $a + b$: $a^4 + 4\ a^3\ b + 4\ b^3\ a + 6\ a^2\ b^2 + b^4$. Con ellos se puede componer un objeto prismático que representa la forma de la 4.ª potencia del binomio $a \times b$. Dadas las magnitudes, tomadas en este caso, el objeto es un prisma de caras cuadradas de cm. 5.5 y de una base rectangular de cm. 5,25. Su construcción efectiva, que se obtiene colocando junto los varios trozos componentes, según las relaciones estudiadas, es un trabajo de inteligencia y paciencia que puede satisfacer lo mismo a un niño que a un adulto.

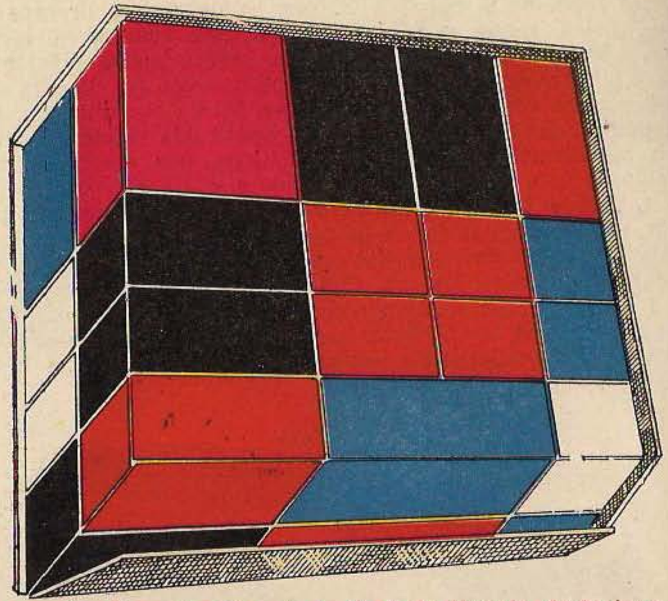


Materealización matemática de la siguiente fórmula algebraica:
$(a + b)^4 = a^4 + 4\ a^3b + 6\ a^2\ b^2 + 4\ a^3\ b + b^4$
$\begin{cases} a = 2 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm.} \end{cases}$

Fig. 274

Con análogo criterio se construye también la 5.ª potencia del binomio, resultando un prisma plano con la cara mayor cuadrada 25.25 y espesor de 5 cm. análoga a la 5.ª potencia representada estudiando las superiores jerarquías del 10 en el sistema decimal: $10^5 = 100.000$. El objeto construído para representar en sus partes los componentes $(a \times b)^5$, puede constituir verdaderamente un juego de ciencia y de paciencia en la interpretación de sus partes y en su correspondencia con los términos algebraicos de la fórmula, como, también, en las composiciones y descomposiciones de las partes.

Aun cuando el trabajo sea, todavía, el de descomponer y re-



Materealización matemática de la siguiente fórmula algebraica :
$(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + a^5$
$\begin{cases} a = 2 \text{ cm.} \\ b = 3 \text{ cm.} \end{cases}$

Fig. 275

componer un conjunto de objetos separables y manejables ¡qué diferencia. de cuando el niño manejaba los bastones preparándose a contar de 1 a 10 a ahora, que posee en objetos tangibles la realización de fórmulas algebraicas que alcanzan a la 5.ª potencia, que hacen penetrar su conocimiento e interés, en campos que fueron siempre inaccesibles a la inteligencia de la infancia!

SISTEMA METRICO DECIMAL

SISTEMA METRICO DECIMAL

Cuando se entra en un argumento práctico, es necesario que en él intervengan varias disciplinas. En efecto, el aislamiento de una disciplina como la aritmética, la geometría, el álgebra, proviene del hecho que se procede por abstracción. Pero, así como un *objeto real* está compuesto de varias cualidades (color, peso, forma, etc.), en él convergen todas y pueden estudiarse abstractamente y por separado cada una de ellas como color, peso, forma, etc., así en una disciplina práctica deben converger varias disciplinas abstractas o elementos sacados de ellas. Si para componer una disciplina práctica se precisan elementos diversos de otras disciplinas, su probabilidad de desenvolvimiento es «dependiente» y puede aquél tener lugar solamente cuando las preparaciones colaterales necesarias se han efectuado.

Mientras en una disciplina abstracta da claridad el profundizar en los detalles, en una disciplina práctica da claridad la completa convergencia de los elementos formativos.

Por eso, para entrar en el estudio del Sistema Métrico Decimal, es decir, en el estudio de las medidas, es necesario utilizar muchos elementos de aritmética, de geometría, de física y hasta de disciplinas más lejanas como la geografía y la historia, dirigiendo éstas continuamente a aplicaciones prácticas sobre objetos reales susceptibles de medida.

Ahora bien, las medidas que se consideran en el sistema métrico no son solamente medidas científicas, como aquellas que van en busca de las cualidades intrínsecas de la materia o de las mínimas dimensiones microscópicas, sino que más frecuentemente son groseras evaluaciones cuantitativas de «objetos» que están ligados a las necesidades sociales del hombre.

El Sistema Métrico tiene, sobre todos los otros sistemas de medidas, dos ventajas que le dan indiscutible superioridad ; una, es el hecho de basarse en un «acuerdo internacional» de unificación, que hace única la evaluación de las cantidades y, por lo mismo, fácil la inteligencia o acuerdo comercial, como sucedería con el Esperanto, lenguaje único que permitiera entenderse a todos los hombres ; y otra ventaja es, la de haber aplicado a los cálculos sobre medidas cuantitativas el Sistema Decimal.

Antes que el Sistema Métrico fuera establecido y aceptado por muchas naciones, cada pueblo tenía su manera propia de medir, hija de sus prácticas tradicionales. Se puede decir que cada país tenía del mismo modo que un lenguaje especial, un especial criterio de medida ; algunos tomaban como límite de medida la longitud del pie o del brazo, o de la mano con el pulgar y meñique extendidos (palmo), otros la altura de una pértiga, etc.

Queriendo llegar a un criterio uniforme y universal se estableció el basar las medidas sobre un dato natural que fuera común a todos los países y se estableció el fundarse en una medida que ahora ya el progreso de las ciencias y de las matemáticas hacía posible ; la del meridiano terrestre. Fué escogido de común acuerdo el meridiano que pasa por París y va del Polo al Ecuador ; esta longitud que, sin duda alguna, sólo podía ser medida cuando la civilización y la cultura estaban muy avanzadas (es decir, en nuestros tiempos) fué después dividida y subdividida de diez en diez, conforme al sistema numérico decimal, hasta que se llegó a obtener una longitud manejable que fué llamada *metro*. Así la palabra genuina metro — que quiere decir «medida» — se convirtió en el nombre propio de esta magnitud.

, Sobre tales cálculos se construyó un *listón de platino*, es decir, un objeto de metal precioso e inalterable que representa la «medida efectiva» sobre la cual fué basado el sistema métrico decimal, el cual se conserva en Francia en los archivos del Estado. La cuarta parte del meridiano terrestre tiene «diez millones» de metros de longitud, por lo tanto, todo él alcanza a «cuarenta millones de metros». El metro equivale, pues, a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

Cuadrante del meridiano de París = metro
10.000.000

Las naciones que han adoptado el sistema métrico son :

EUROPA	AMERICA
España	Argentina
Italia	Uruguay
Francia	Chile
Bélgica	Méjico
Suiza	Perú
Grecia	Bolivia
Rumanía	Brasil
Yugoslavia	Venezuela
Austria	Colombia
Holanda	
Suecia	
Alemania	
Portugal	
Dinamarca	

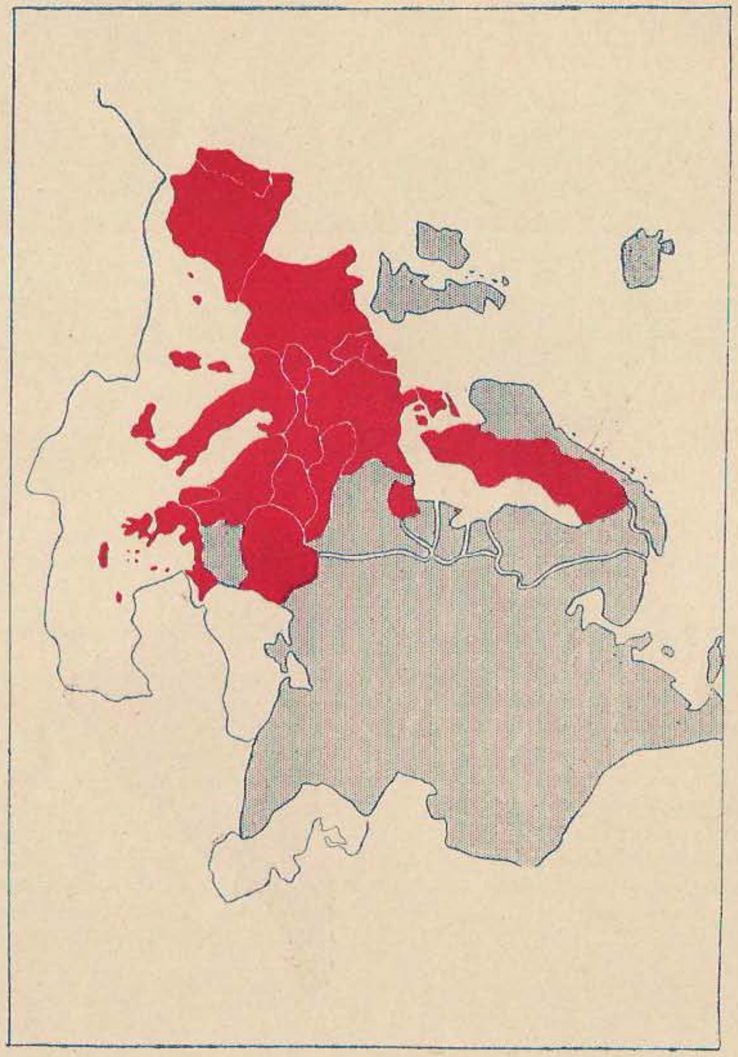


Fig. 276

Fig. 277

Y no lo han adoptado hasta hoy :

Inglaterra
Estados Unidos de América
Canadá y, en general, todas las Colonias y Dominios ingleses.
Egipto
China
Japón

Se prescinde de los países de Africa y Asia que se hallan aún separados de las grandes civilizaciones occidentales.

En el sistema métrico decimal hay que considerar dos cosas : esto es : «la unidad de medida» que se debe determinar positivamente en relación con todas las cosas susceptibles de medir, que pueden ser :

medidas lineales de longitud (línea)
medidas de planos y superficies (plano)
medida de volúmenes (cubo)

Y el procedimiento de acumular las unidades en grupos decimales, según el sistema numérico decimal, para el cálculo de las medidas.

Ahora bien, a los grupos decimales se les da en el sistema métrico nombres especiales que proceden del griego y quieren decir :

10 — deca.
100 — hecto.
1000 — kilo.
10000 — miria.

Así, no se dirá cien metros, sino un hectómetro y no mil metros, sino un kilómetro.

Del mismo modo que los múltiplos, tienen los submúltiplos decimales un nombre ; esto es, la décima, la centésima y la milésima parte de la unidad.

Las denominaciones son

deci $\frac{1}{10}$ = 0'1.

centi $\frac{1}{100}$ = 0'01.

mili $\frac{1}{1000}$ = 0'001.

No se dirá pues, la décima parte del metro, sino un «decímetro» ni la centésima o milésima parte, sino un «centímetro» o un «milímetro».

El modo más común y claro de representar estas denominaciones, consiste en letras mayúsculas para los múltiplos, y minúsculas para los submúltiplos, a las cuales se une la indicación, con letra minúscula, de la medida de que se trata. Por ejemplo:

Mm — Miria-metro	....	10.000
Km — Kilo-metro	....	1.000
Hm — Hecto-metro	....	100
Dm — Deca-metro	....	10
m — metro	....	1
dm — deci-metro	....	0'1
cm — centi-metro	....	0'01
mm — mili-metro	....	0'001

Si se trata de medidas cuadradas y cúbicas, las denominaciones no varían, sólo se añade la indicación relativa con las palabras: cuadrado, cúbico; metro cuadrado, metro cúbico, hectómetro cuadrado, etc.

Y las indicaciones abreviadas llevan el signo numérico que se usa para los cuadrados y cubos de los números, como Hm^2, m^3.

Si se tratase de medidas cuadradas o cúbicas, la relación entre ellas es: de 100 en 100 o de 1000 en 1000, como se ha visto en el sistema decimal, esto es:

Medidas de superficie

Km^2 = 1.000.000 m^2 (esto es 1000 × 1000).
Hm^2 = 1.00.000 m^2 (esto es 100 × 100).
Dm^2 = 100 m^2 (esto es 10 × 10).
m^2 = 1.
dm^2 = 0,01
cm^2 = 0'0001.
mm^2 = 0'00 00 01.

Medidas de volúmen

Km^3 = 1.000.000.000 m^3.
Hm^3 = 1.000.000 m^3
Dm^3 = 1.000 m^3
m^3 = 1.
dm^3 = 0'001.
cm^3 = 0'000,001.
mm^3 = 0'000 000 001.

Esta gradación de valores hay que tenerla presente en caso de

cálculos o de reducción de medidas de orden superior a uno inferior.

En el cuadro anterior aparece claro que los submúltiplos de la unidad de medida son numéricamente fracciones decimales que se indican con el cero que representa la unidad de medida, seguido de la coma que nos hace ver descendemos a la parte inferior de aquélla. La unidad, siendo una cantidad realmente determinada, es un punto de partida de evaluación que puede perseguirse en sentidos opuestos con los grados exactos y sistemáticos del sistema decimal.

Por esto las cantidades que van del lado de las disminuciones son verdaderamente «fracciones de la unidad» matemáticamente consideradas. No se tiene sino el más o el menos respecto a una cantidad convencional establecida en relación con las diferentes contingencias de la medida.

Fig. 278

El decímetro es una longitud, no es verdaderamente, una *fracción* de alguna cosa. El metro es diez decímetros como extensión longitudinal y una décima parte del decámetro. Ahora bien, el decámetro se extiende 100 decímetros. En efecto, en algunas medidas de orden numérico, el decímetro cúbico es una milésima parte de la unidad—metro cúbico—mientras es mil veces la unidad en el sistema de las medidas de peso, que tienen como unidad convencional la medida de 1 cm^3.

Las medidas son correlaciones decimales crecientes y decrecientes en torno a la unidad establecida. Cada una de ellas es una extensión particular, es, puede decirse, *una unidad en sí misma* que sirve para medir. En efecto, mide por igual el centígramo del farmacéutico que el hectogramo del droguero; su correlación con la unidad es una convención necesaria para orientarnos sobre la cantidad de materia. No se puede, pues, hablar de «cálculos» sobre las fracciones.

La coma misma es, también, una convención que nos lleva al sistema numérico decimal.

Las reducciones en fracciones etc. son simplemente el tomar en consideración, para las necesidades prácticas, medidas de varia magnitud, proporcionadas a la cosa que hay que medir.

Si algunas veces precisa usar la fórmula de la fracción decimal es porque todo está *orientado hacia un centro* la unidad de medidas, pero el cálculo se lleva a cabo como si no existiera discontinuidad

(Números) 1000.000 — 100.000 — 10.000 — 1.000 — 100 — 10 — 1 (unidad matemática)

(Orientación central) 1000 — 100 — 10 — 1 — 0'1 — 0'10 — 0'100 (unidad de medida)

No hay, pues, que considerar la fracción decimal como una dificultad en el cálculo.

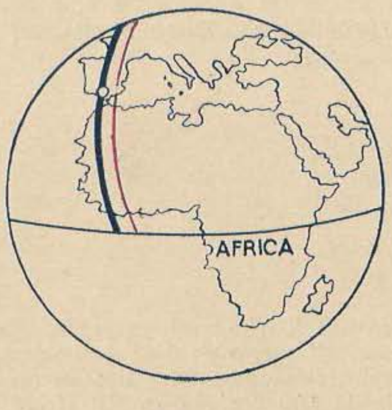


Fig. 279

Si volvemos a ios listones largos subdivididos, que constituyen el primer material para contar en las «casas de niños», se tiene representada en el listón mayor la longitud de un metro (listón de 10) y en el menor la longitud de un decímetro (listón de 1).

Los listones intermedios corresponden respectivamente a las longitudes de

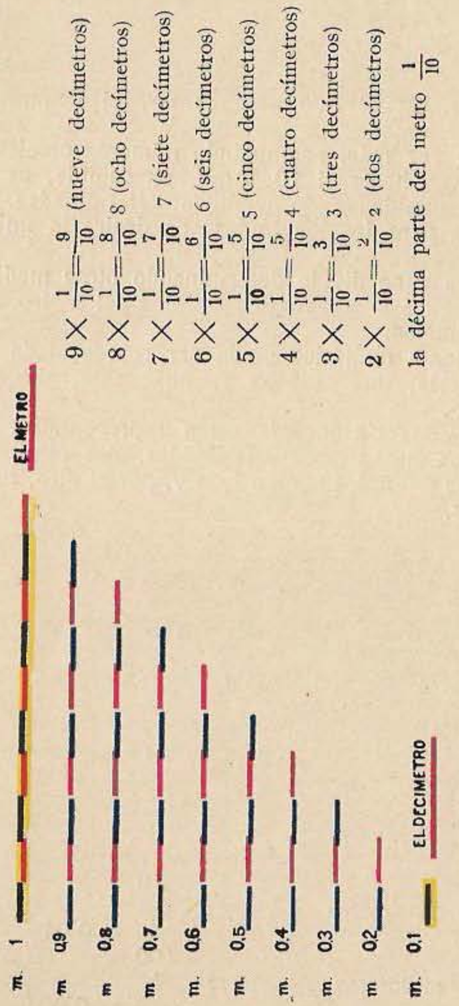


Fig. 280

dos decímetros.
tres decímetros.
cuatro decímetros.
cinco decímetros.
seis decímetros.
siete decímetros.
ocho decímetros.
nueve decímetros.

En el material que había servido para contar, el listón más corto representaba abstractamente la unidad—numérica—y sucesivamente se repetía una vez más, acumulando números crecientes sobre los listones sucesivos hasta el 10. Aquí, en cambio, se representan perfectamente «unidades de medida» determinadas.

La unidad de medida para las longitudes, es decir, la unidad de medida lineal es el metro; esto es, el listón largo de 10.

El metro se multiplica y se divide determinando otras medidas que se establecen de 10 en 10, sea como múltiplos del metro, sea como subdivisiones decimales.

La unidad en el sistema numérico podía ser representada por cualquier objeto: una perla, una muñeca y, finalmente, era una idea, era el *número uno*.

En cambio, las *unidades de medida* están representadas por objetos y, sobre todo, por dimensiones establecidas. Son el centro, del cual se parte hacia sus múltiplos por un lado y, por el otro, hacia sus fracciones decimales.

1000 metros	Kilómetro	Km.	1000
100 metros	Hec'ómetro	Hm.	100
10 metros	Decámetro	Dm.	10
Unidad de medida	el Metro	m.	1
10ª parte del metro	decímetro	dm.	$\frac{1}{10} = 0'1$
100ª parte del metro	centímetro	cm.	$\frac{1}{100} = 0'01$
1000ª parte del metro	milímetro	m.m	$\frac{1}{1000} = 0'001$

Cada una de estas medidas vale 10 veces la medida inmediatamente inferior. Por ejemplo, 1 km. = 10 Hm. 1 Hm. = 10 Dm., etc., como sucedía en las jerarquías de la serie natural de los números. Reducir una medida superior a una inferior equivalía a escribir un número acompañándolo de ceros según su puesto gerárquico. Respecto a las medidas, se dirá: en vez de cuatro Kilómetros, cuatro mil metros, o, en vez de dos metros, doscientos centímetros. Se podría también reducir Kilómetros a milímetros aún cuando esto no suceda ordinariamente en la práctica. En ese caso tendríamos: 3 Km. = 3.000.000 de mm.

En la vida práctica, las medidas que se usan, son, para las grandes distancias, como medida de carreteras entre ciudades, etc. el Km. Para las medidas de longitud o altura poco relevantes, como las que se refieren a una casa, a una habitación, a un mueble o también a la medida de telas, el *metro*.

Para las medidas pequeñas (como, por ejemplo, un dibujo) se usa siempre el decímetro o el doble decímetro, que lleva las subdivisiones indicando los centímetros, fig. 281.

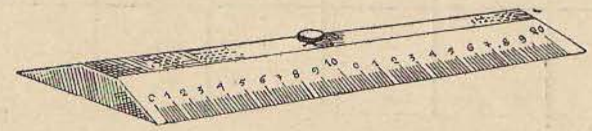


Fig. 281

Las otras medidas no se usan, generalmente, en la práctica. Así, por ejemplo, entre dos puntos de una carretera cuya distancia se debe medir si queda una fracción de Km. se indica en metros.

Se dirá, por ejemplo, 12 kilómetros y 700 metros y no 12 kilómetros y 7 hectómetros. Cuando, en cambio, se usa el metro, sus fracciones se indican en centímetros. Por ejemplo, 4 metros y 60 centímetros y no 4 metros y 6 decímetros. Si se trata de una magnitud pequeña, en la que hay que apreciar hasta el milímetro, se expresa la medida entera en milímetros. Así, por ejemplo, se dirá 46 milímetros y no 4 centímetros y 6 milímetros.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

El metro continúa siendo aplicado prácticamente en las medidas de superficie, porque, lo que realmente puede medirse en una superficie, son los lados; esto es, el contorno, los límites lineales que constituyen éste.

Para su estudio se puede recurrir a la geometría, a las equivalencias de las figuras planas, y al modo de calcular su área (*véase la Psico-Geometría*).

Sí, por ejemplo, se quiere calcular la superficie del pavimento de una terraza de forma rectangular que tiene el lado mayor igual a 6 metros y el menor igual a 4.

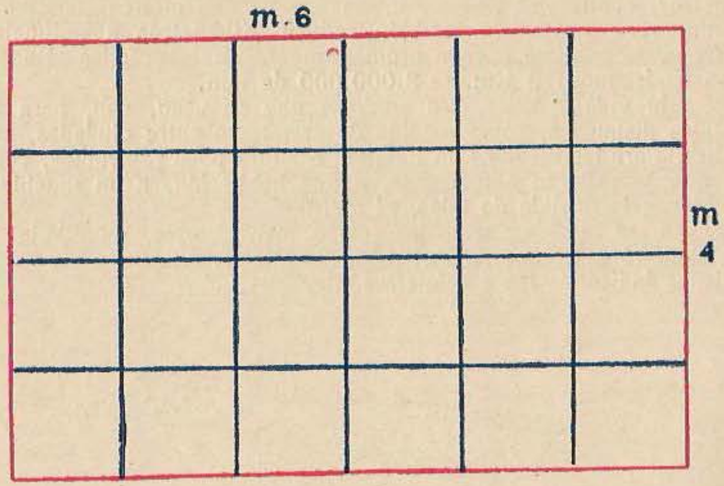


Fig. 282

El trabajo práctico consiste en medir exactamente con una cinta métrica o con un metro rígido la longitud y anchura de la terraza.

El área vendrá expresada por el producto de las dos medidas lineales, el producto de 6 × 4 = 24.

Aquel 24 no significa, sin embargo, 24 metros de longitud, sino 24 cuadrados que tienen 1 metro de lado.

El resultado del cálculo se expresa por ello en *metros cuadrados* y aún cuando en realidad no se aplique jamás sobre las superficies el metro cuadrado, es éste la unidad de medida en el cálculo de ellas.

Si en vez de las medidas lineales de los lados se contasen las perlas que delimitan como lados un rectángulo o un cuadrado de perlas, por ejemplo, 6 × 4 o 5 × 5 (como indica la figura) tanto los lados como la superficie estarían siempre calculadas como unidades iguales, esto es, como perlas: 6 × 4 = 24; 5 × 5 = 25 perlas, porque éstas representan una abstracción numérica de la unidad y significan, bajo forma geométrica, una simple multiplicación de números.

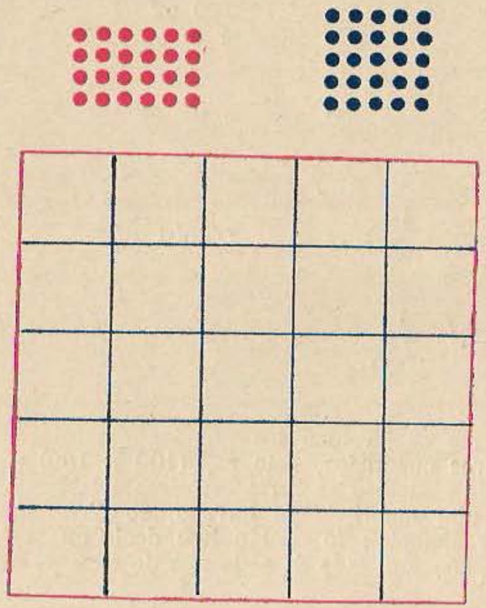


Fig. 283

Cuando se trata, sin embargo, de medir positivamente una superficie hay que distinguir entre la medida real que es lineal y el cálculo que representa a través de los números multiplicados, un producto de *metros cuadrados*.

El cálculo se indica con la letra *m* (metros) así:

$$6 \times 4 \text{ m} = 24 \text{ m}^2$$

o

$$5 \times 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$$

Este último puede, también, representarse por $(5 \text{ m})^2 = 25 \text{ m}^2$ ya que equivale a un cuadrado que tiene 5 metros de lado.

Las medidas de superficie se indican con *medidas cuadradas*, porque la superficie se obtiene siempre de una multiplicación. De igual modo que en la serie de las medidas lineales se sucedían las unidades de longitud de diez en diez, así, para las superficies se consideran los cuadrados correspondientes. Las medidas son:

$$\begin{array}{lll} Km^2\ (1000 \times 1000) & = & 1.000.000\ m^2 \\ Hm^2\ (100 \times 100) & = & 10.000\ m^2 \\ Dm^2\ (10 \times 10) & = & 100\ m^2 \\ m^2\ (1) & = & 1\ m \end{array}$$

$$dm^2\ (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}) \quad = \quad 0'01\ m^2$$

$$cm^2\ (\frac{1}{100} \times \frac{1}{100}) \quad = \quad 0'0001\ m^2$$

$$mm^2\ (\frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000}) \quad = \quad 0'000001\ m^2$$

Prácticamente se evalúan las grandes extensiones de terreno por Hectómetros cuadrados, esto es, $(100 \times 100) = 10.000$ m^2.

Esta medida «cálculo» se llama Hectárea. Hablando, pues, de la extensión de una superficie de terreno, se dirá, que es de 200 hectáreas, por ejemplo; lo cual quiere decir que está compuesta de 200 cuadrados, y el lado de cada uno de ellos es de 100 metros de largo.

$$200 \times 10.000 = 2.000.000 \text{ de } m^2$$

En la práctica se usa, también, el decámetro cuadrado, que es un cuadrado de 10 metros de lado y se llama *área*.

En cambio, para medir extensiones inmensas de terreno se emplea el «Kilómetro cuadrado».

Si consideramos ahora, la serie de valores relativos a las medidas cuadradas o de superficie, observaremos que, al pasar éstas de un grado decimal a otro y, refiriéndose al lado del cuadrado, no aumentan de 10 en 10 sino de 100 en 100, porque aumentando de 10 en 10 el lado, la superficie aumenta de $10 \times 10 = 100$.

Si se quiere, pues, pasar en el cálculo escrito de una medida mayor a una inmediatamente inferior que indique la misma superficie, precisa multiplicar por 100 y no por 10. Por ejemplo, 25 hectáreas equivalen a 2500 áreas y 2500 áreas equivalen a 250.000 m^2.

$$\begin{array}{llll} Hm^2 & = \text{Hectárea} & = & 25 \\ Dm^2 & = \text{Area} & = & 2500 \\ m^2 & = & = & 25.000 \end{array}$$

Si se quiere calcular un terreno muy grande que midiera 10.000 metros por un lado y 1000 metros por otro, es decir, una extensión de 1 Km. por 10 Km. se haría primero el cálculo en metros cuadrados: $10.000 \times 1000 = 10.000.000$ m^2 y se expresaría el total en Hectáreas. $10.000.000 : 10.000 = 1000$ hectáreas.

En cambio, si se tratase de la extensión de una Nación o Provincia, se expresaría en Kilómetros cuadrados.

Estas medidas: Area, Hectárea y Kilómetro cuadrado, son convencionales para expresar con números pequeños una inmensa cantidad de m^2 que se obtiene en el cálculo, pero no son «medidas efectivas» esto es, objetos que sirvan para medir.

Estas grandes medidas se obtienen, pues, mediante el cálculo. Se levantan planos del terreno por medio de aparatos especiales que usan los ingenieros y calculan con la ayuda de líneas y ángulos que pueden determinar mediante aquéllos. Cualquiera, sin embargo, puede calcular el área de un terreno cuando se le dan las líneas necesarias. Conviene recordar, a este propósito, las reducciones de las figuras geométricas regulares a un rectángulo equivalente, lo que quiere decir: reducir el cálculo a la multiplicación de dos números.

Sea, por ejemplo, un campo triangular que tiene como base 500 metros y como altura 405.

$$\text{El área sería } \frac{500 \times 405}{2} = \frac{202500}{2} = 101.250 \text{ m}^2$$

o lo que es igual 10 hectáreas y 1250 m^2.

Si, en cambio, se trata de un terreno tropezoidal que tiene los dos lados-base de 200 y 300 respectivamente y la altura de 160 m. el área será igual a $300 + 200 \times 80 = 500 \times 80 = 40.000$ o lo que es lo mismo, cuatro Hectáreas.

Si el precio de este último terreno es a 2 pesetas el m^2, costaría 80.000 pesetas.

VOLÚMENES

Para el cálculo de los volúmenes se usa como unidad de medida el m^3, pero no de una manera efectiva, esto es, no se transporta nunca materialmente un m^3. Es siempre con líneas con lo que se calculan los volúmenes.

Así, por ejemplo, si se quiere saber la capacidad de una sala hay que medir en metros lineales las longitudes de los dos lados rectangulares y después la altura hasta el techo.

Sea, por ejemplo, un salón de 9 metros de largo, 7 metros de ancho y 5 metros de alto. Antes que nada, hay que consignar el área del pavimento 7 m × 9 m = 63 m^2. Después, multiplicar el área por la altura: 63 m^2 × 5 = 315 m^3.

Si en vez de esto se quisiera calcular el volumen de una de las pirámides de Egipto, habría que conocer el lado de la base cuadrada y la altura, en metros lineales; hallar el área de la base (cuadrado del lado) lo que daría una cifra en metros cuadrados, multiplicar este número por la *tercera parte* de la altura y esto nos daría en *metros cúbicos* el volumen de la monumental pirámide.

Conviene ahora recordar cómo se calculan los volúmenes de los sólidos geométricos.

Problema infantil

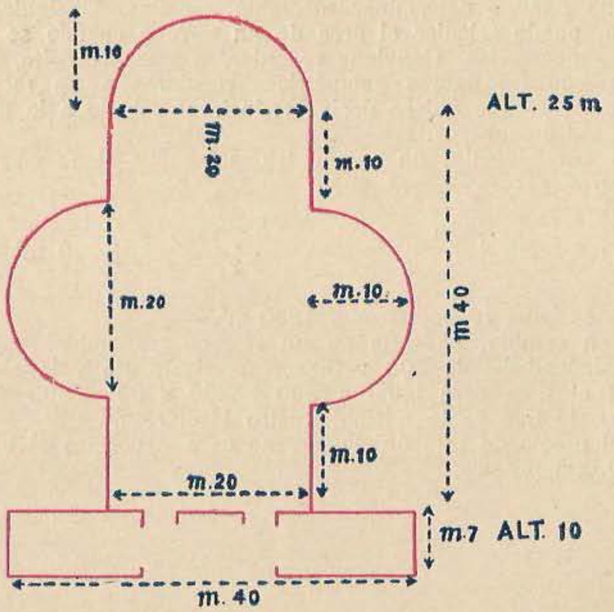


Fig. 284

Tenemos el plano de una iglesia que se puede dividir en varias partes. El cuerpo central de forma prismática rectangular tiene una superficie que mide 40 × 20 y una altura de 25 metros. Tiene en tres lados, tres ábsides en forma de medio cilindro en el que el radio del círculo base, es de 10 metros.

Existe además un peristilo prismático que mide 40 × 7 de base y 10 de altura.

Calculemos la capacidad de todas estas partes.

El cuerpo prismático tiene un rectángulo base de 40 × 20 = 800 m^2 y una altura de 25 m., 800 m. × 25 m = 20.000 m^3

Los tres ábsides forman juntos un cilindro y medio, que tiene como base en círculo de 10 metros de radio y una altura de 25 m.

Círculo base (10 × 10) × 3'14 = 100 m^2 × 3'14 = 314 m^2
314 m^2 × 25 m = 7850 m^3.
Medio cilindro = 7850 m^3 : 2 = 3925 m^3.
Luego, los tres ábsides sumarán 7850 m^3 + 3925 m^3 = 11775 m.
La iglesia, pues, tendrá de capacidad.

Cuerpo central	20.000 m^3.
Absides	11.775 m^3
	31.775 m^3

A lo cual hay que añadir el peristilo
40 m ×   m = 280 m^2
280 m^2 × 10 = 2800 m^2.
La capacidad total de la iglesia será:

$$\begin{array}{r} 31775\ m^3 \\ 2800\ m^3 \\ \hline 34575\ m^3 \end{array}$$

O lo que es igual 34 Dm^3 y 575 m^3

Estamos construyendo modelos de papel y dibujos de los principales monumentos con las cifras de sus medidas. Estos modelos se pueden también aplicar a un estudio histórico y artístico y al cálculo aproximado de sus dimensiones para que se tenga, por parte de los niños, alguna idea real sobre los volúmenes de las grandes construcciones humanas.

MEDIDAS DE CAPACIDAD

La medidas más comunes en la vida práctica son las que se refieren a determinar la cantidad de substancias que en sí mismas no tienen una forma, como, por ejemplo, los líquidos—agua, aceite, vino, etc. o también cantidades de áridos, como, por ejemplo, el trigo, el arroz, la harina o igualmente arena, grava para esparcir en un jardín, leña, etc.

Precisa, pues, una *unidad de medida* para las capacidades, la cual, debe tener su base en el metro, ya que forma parte del sistema métrico, y los grupos de unidades deben sucederse de 10 en 10 por formar parte del sistema decimal.

La medida métrica establecida para la capacidad es el dm³. En el material de las «casas de los niños» la torre roja presenta en el cubo mayor, con arista de 10 cm. el volumen escogido.

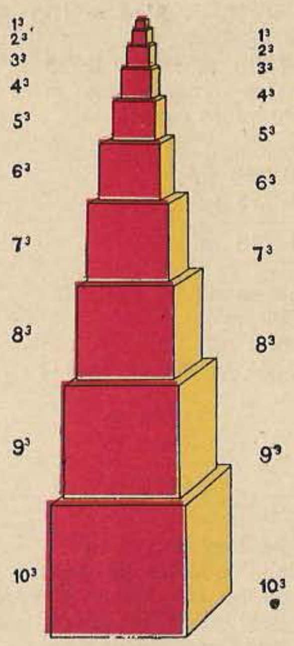


Fig. 285

Si se construye un revestimiento exacto de este cubo, en forma de una cajita de metal que lo contenga exactamente, y después se sustituye el cubo interno por una cantidad de agua que llene la cajita hasta el borde, esta cantidad representa *un litro* y es la unidad de medida para los líquidos.

Una vez determinada esta cantidad, el cubo no es ya necesario en la práctica de las mediciones.

Un cilindro donde se introduce un litro de agua, puede, si se señala el punto al cual llega la superficie del líquido, servir después como medida de un líquido cualquiera.

Igualmente se puede hacer con una botella de forma común que lleve una señal fija en el punto al cual llega un litro de líquido.

En efecto, los líquidos se miden en los recipientes más varios de forma, como barriles, damajuanas, etc.

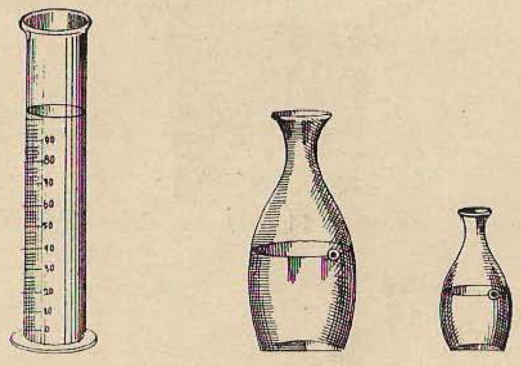


Fig. 286

El cálculo, sin embargo, se refiere siempre, como centro y unidad de medida, a la capacidad de 1 dm³, es decir, a un recipiente cúbico que tiene 1 dm. de arista.

Las medidas de líquidos, de uso corriente son:

el Hl. (el Hectólitro) = 100 litros.
el Dl. (el Decálitro) = 10 litros
el litro = 1 litro = 1 dm³
el dl (el decílitro) = $\frac{1}{10}$ de litro = 0'1 litros
el cl (el centílitro) = $\frac{1}{100}$ de litro = 0'01 litro.

También las medidas de capacidad son medidas de volumen. En efecto, aquéllas representan.

1 litro 1 dm³
el decálitro una fila de 10 cubos.
el hectólitro un cuadrado de 100 cubos.
el pilómetro la superposición de 10 hectólitros o sea la capacidad de 1 m³.

Las medidas efectivas que se usan en la práctica son de vidrio, señaladas en el punto al cual llegó el líquido, y funcionan de este modo como medidas.

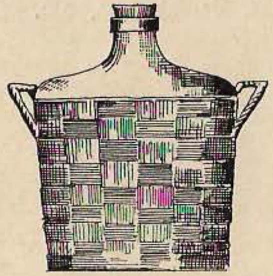


Fig. 287

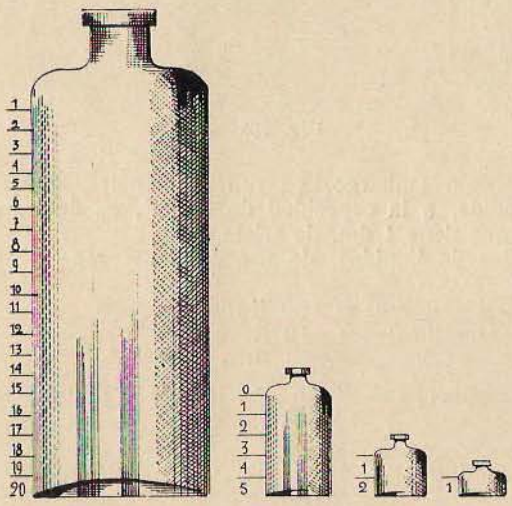


Fig. 288

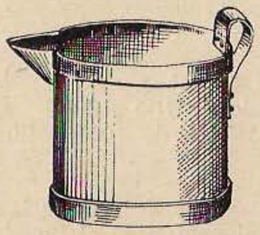


Fig. 289

Se usan para mayores medidas, recipientes de metal o madera en forma de odre o barril.

Para el aceite, las medidas son, generalmente, metálicas, como ollas provistas de asidero y pico, que llevan una señal que indica el punto, al cual, debe llegar la medida precisa.

MEDIDAS DE ÁRIDOS

Para los áridos, en cambio, las medidas son cilíndricas, de metal o madera, llevan, con frecuencia, sobre el brocal una cruz metálica indicando el nivel preciso de la medida y esta cruz sirve, también, como asidero. Con éstas se mide el grano, la harina, el arroz. Dichas medidas se usan, generalmente, en el campo, donde no existen balanzas capaces de registrar grandes pesos.

Fig. 290

MEDIDAS DE PESO

El procedimiento más interesante para la determinación práctica de la unidad de medida, es el que se refiere al peso de los cuerpos.

El punto métrico de partida, es un pequeño cubo que se encuentra en la cima de la torre roja y que tiene un cm. de arista. Era preciso hallar un peso exacto y, para esto, es necesaria *una balanza* de precisión, que forma parte de los instrumentos científicos de la mecánica.

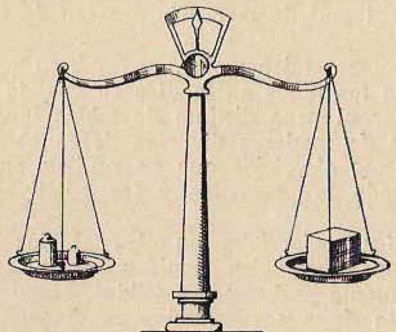


Fig. 291

Ahora hay que determinar un *volumen* y una calidad de materia, porque cada materia en el mismo volumen puede tener un peso distinto.

He aquí, pues, dos criterios separados, dos elementos, ambos importantes.

El volumen escogido fué : *la capacidad de un cubo* de un cm. de arista.

Imaginemos una cajita metálica que contenga exactamente un pequeño cubo, como el primero de la torre, pero determinado con gran exactitud, construído también de metal, de modo, que represente precisamente un cm^3.

Pues bien, quitado el pequeño cubo, quedaría la cajita metálica, de la capacidad precisa de 1 cm^3.

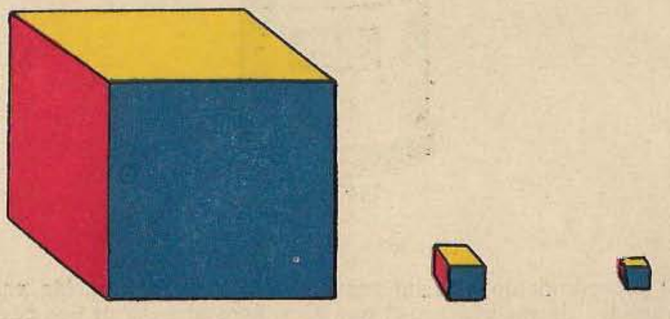


Fig. 292

Esta cajita se debe llenar de una materia que hay que escoger, porque la substancia influye sobre el peso más que el volumen. 1 cm^3 de aceite y 1 cm^3 de mercurio pesarán de fijo muy distintamente.

Para hacerlo comprender mejor, se podrían recordar los ejercicios que realizan los niños en la «Casa» cuando buscan, empíricamente, reconocer el peso distinto de tablas iguales en forma y dimensiones, pero de maderas diversas desde el ébano al abeto; y después, los otros ejercicios que se repiten en las clases elementales, estudiando la gramática y los adjetivos superlativos y comparativos.

Se realiza allí un ejercicio, en el cual, los niños ponen en comparación varias substancias líquidas, como agua, aceite, alcohol y, conjuntamente, substancias sólidas, como plomo y corcho. Independientemente de sus cantidades se dispone una debajo de la otra, pero sin mezclarlas, y el agua, el aceite y el alcohol permanecen separados y superpuestos entre los dos extremos sólidos, el plomo que va al fondo y el corcho que flota.

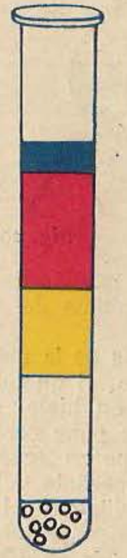


Fig. 293

Ya el peso relativo a la substancia, y no al volumen, fué conocido por los niños con la distinción del adjetivo «específico»

Será, pues, claro para ellos que juntamente con el volumen, sea necesario determinar una materia, según su peso específico. La materia escogida, ha sido el agua. La unidad de peso está determinada por el peso de 1 cm^3 de *agua*.

Se sabe, sin embargo, que el agua puede ser pura o impura. Muchos adjetivos del agua fueron ya estudiados ; el agua debe ser inodora, incolora, insípida, etc. También el agua fué filtrada a través de cuerpos *permeables*. La conclusión fué, que para obtener agua pura, precisa destilarla, porque cuando se transforma en vapor no lleva consigo ningún cuerpo de los que contiene en disolución, sino que se convierte en *agua químicamente pura* (H^2O) y así se recoge con el enfriamiento que vuelve a reducirla al estado líquido, gota a gota.

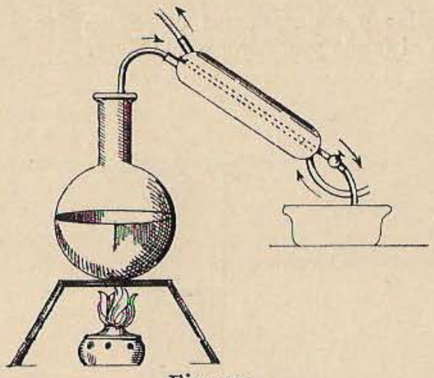


Fig. 294

El gramo, unidad de medida del peso, está determinado por el peso de un centímetro cúbico de agua destilada a 4° centígrados de temperatura.

Como se sabe, el agua es la materia que sirve para determinar la temperatura. En efecto, si un tubo cerrado, con mercurio en su interior, se le introduce en hielo, el mercurio se encoge y en el bajo nivel a que llega se pone cero (cero grados de temperatura). Si después se le introduce en agua hirviendo (esto es, cuando se forma el vapor en la superficie del agua expuesta a la atmósfera normal) el mercurio se dilata y el punto máximo a que llega se señala con 100 (cien grados de temperatura). Aquel espacio entre 0° y 100° se divide después en 100 partes que se llaman grados. Pues bien, el agua tiene la densidad máxima a 4°.

Fig. 295

Se ha establecido, pues, que la unidad de peso *corresponde al peso de un cm³* de agua destilada a 4° centígrados de temperatura.

Este peso, obtenido en relación con el sistema métrico, se llama *gramo*.

La unidad de peso es muy pequeña y ello es necesario, porque algunas veces sirve como punto de partida para la evaluación de cantidades minúsculas y muy exactas como sucede en Medicina o también de las substancias que se utilizan para análisis químicos.

El gramo, que prácticamente se usa para pesar, no es aquel pequeño cubo de agua, sino, un pequeño cilindro de cobre dotado de un minúsculo botón para asirlo y se determina con una balanza de precisión, de modo, que corresponda perfectamente al peso de agua del pequeño cubo.

En la práctica se utilizan, también, pesos menores que el gramo, que son en la sucesión decimal.

$\frac{1}{10}$ de gramo = decigramo = 0,1 gramo.

$\frac{1}{100}$ de gramo = centígramo = 0'01 gramo.

$\frac{1}{1000}$ de gramo = milígramo = 0'001 gramos.

Estos pequeños pesos no tienen la forma de cilindros como los otros, hasta el gramo, sino que son pequeñas hojas metálicas que se cogen por medio de pinzas. Las balanzas capaces de apreciar dichos pesos son «balanzas de precisión» que se manejan dentro de cajas de cristal por medio de tornillos, para que las pesadas no sufran la influencia de las corrientes de aire.

En cambio, para los pesos corrientes en la vida práctica, se usan múltiplos del gramo y uno de éstos, el kilogramo, sirve de base.

1. gramo .... gr.
10. decagramo ... Dgr.
100. hectogramo ... Hgr.
1000. kilogramo ..... kg.

El kilogramo corresponde al peso del agua contenida en un decímetro cúbico, grande como el cubo mayor de la torre roja, por lo tanto, corresponde al peso exacto de un litro de agua destilada.

En la práctica se usa, también, el hectogramo, como sucede cuando se compra al por menor, los artículos alimenticios para uso diario de la familia.

Cuando se trata de evaluar pesos muy grandes se recurre a los dos extremos representados por el peso citado—1 kilogramo en relación con 1 dm^3—y el peso del agua destilada que llenaría exactamente la capacidad de un metro cúbico. Un m^3 contiene 1000 dm^3 y corresponde, por ello, al peso de 1000 kilogramos. Este peso enorme se llama *Tonelada*.

Si se trata de 100 kilogramos, entonces el peso se llama *Quintal*.

El quintal se usa para pesar la leña, el carbón y artículos semejantes.

He aquí, pues, la lista de las unidades de peso:

1.000.000 gr.	= Tonelada (metro cúbico)	T = 1000 kgs.
100.000 gr.	= Quintal	Q = 100 kgs.
10.000 gr.	= Miriagramo	Mgr. = 10 ggs.
1.000 gr.	= Kilogramo (decímetro cúbico)	Kg. = 1000 gs.
100 gr.	= Hectogramo	Hgr.
10 gr.	= Decagramo	Dgr.

Unidad de medida 1 gramo (centímetro cúbico) — gr.

$\frac{1}{10}$ de gramo = decigramo dgr.

$\frac{1}{100}$ de gramo = centigramo cgr.

$\frac{1}{1000}$ de gramo = miligramo (mm. cúbico) mgr.

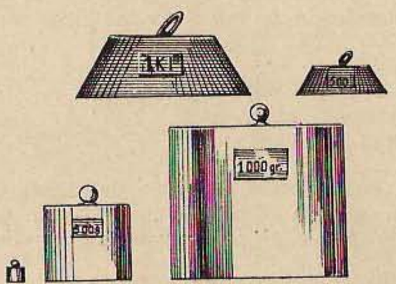


Fig. 296

Las medidas de peso son siempre indirectas, y hay necesidad de un instrumento mecánico para evaluarlas.

No solamente los pesos establecidos en el sistema métrico deben ser exactos, sino también, el instrumento mecánico empleado para su evaluación.

Este instrumento se llama balanza.

La balanza se basa en el equilibrio perfecto de dos pesos idénticos que se colocan en sus dos platillos, suspendidos. En uno de ellos se coloca la substancia que se desea medir y en el otro *los pesos*.

Cuando sobre los dos platos los pesos se corresponden perfectamente, los brazos, que oscilaban a ambos lados del punto de apoyo, se mantienen horizontales.

Para probar una balanza se efectúa la *doble pesada*, esto es; se colocan los pesos donde estaba la substancia u objeto y recíprocamente, y se observa si el equilibrio se restablece igualmente.

Existen muchas clases de balanzas que se basan en diversos principios de mecánica.

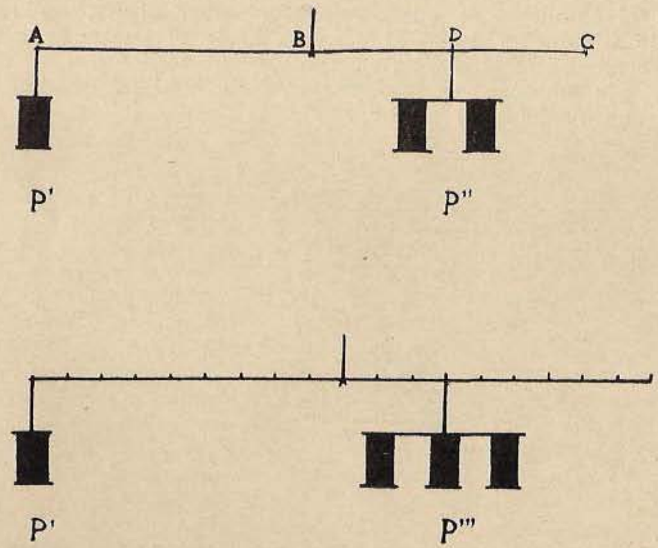


Fig. 297

Si la barra AC es simétrica con relación al punto de apoyo y se coloca en el extremo A. un peso P, éste se equilibra con un peso doble P'' colocado en la mitad del brazo BC, es decir, en D.

El mismo peso P' se equilibra con un peso triple P''' que esté colocado a una tercera parte de distancia del punto de apoyo en la segunda parte de la barra.

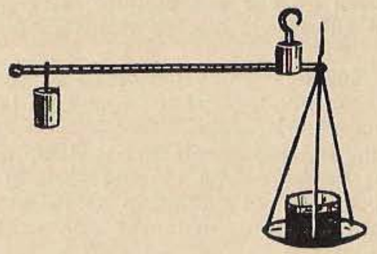


Fig. 298

Sobre este principio se funda *la romana* que tiene un solo plato y el equilibrio se busca haciendo correr el peso sobre el brazo de suspensión desde el extremo hacia el punto de apoyo, donde se encuentra el platillo suspendido.

Hoy, sin embargo, se usan balanzas automáticas, que no exijen ninguna maniobra ni prueba.

Fig. 299

El objeto se coloca sobre el plano horizontal de una caja y hay una manecilla que, guiando, se detiene en el punto donde está escrito el peso del objeto o substancia.

También las balanzas para grandes pesos (carros, camiones cargados, etc.) son automáticas.

Las medidas volumétricas comprenden { volumen, capacidad, peso

Unidad de medida de los volúmenes.—el metro cúbico—m^3
Capacidad de un Kilolitro (1000 l.)
Peso (lleno de agua etc.)—una Tonelada—1000 kg.
Unidad de medida de la capacidad—$1 dm^3$—1 litro.
Peso (lleno de agua etc.)—1 kilogramo.
Unidad de medida de peso
$1 cm^3$ (lleno de agua etc.)—un gramo.

MEDIDAS DE LOS PESOS ESPECÍFICOS

Si se tienen dos cantidades iguales de volumen, pero que difieren en peso, esto indica que tienen distinto peso específico, que son de diversa densidad. Por ejemplo: hierro, ébano, corcho o también mercurio, aceite, vino, alcohol, etc. pesan diversamente siendo la misma cantidad.

Preparemos pequeños cubos iguales de 1 cm^3 de hierro, aluminio, mármol, cristal, ébano y corcho. Precisa confrontar cada uno de estos pequeños cubos con el peso de 1 gramo, que es el que corresponde al volumen de agua.

Entonces se dirá, que:

el hierro pesa	—	7'20 gr.
el aluminio	—	2'56 gr.
el mármol	—	2'65 gr.
el cristal	—	3'33 gr.
el ébano	—	1'12 gr.
el corcho	—	0'24 gr.

Y para substancias líquidas colocadas dentro de pequeños tubos en cantidad de un cm^3

el mercurio pesa	—	13'60 gr.
el aceite	—	0'92 gr.
el alcohol	—	0'79 gr.

Así los pesos específicos, en los cuales se habían notado las diferencias, pero sólo de modo empírico, según se fueran al fondo o sobrenadasen, se pueden determinar ahora, en cifras, que se prestan a la posibilidad de hacer cálculos comparativos.

También es posible calcular el peso de un objeto, del cual, son conocidos el volumen y peso específico.

Por ejemplo ¿cuánto pesarán 2 cm^3 de mercurio?

Pesarán $2 \times 13'60 = 27'20$.

¿Cuánto pesará un dm^3 de hierro fundido?

Pesará $7'20 \times 1000 = 7200$ gr. = 7 kg. y 200 gr.

¿Qué volumen tendrá 1 kg. de corcho?

1 cm^3 de corcho pesa 0'24.

```
100000 | 24
  40     4'166     tendrá de volumen 4 dm³ más 166 mm³
  160
   160
```

ESTUDIO DE LAS MEDIDAS Y PROBLEMAS

El estudio de las medidas se presta al cálculo de modo directo; cada particular de índole práctica suscita problemas.

En efecto, cada uno de nosotros resuelve a diario pequeños problemas sin darse cuenta. Los problemas pueden constituir un activo y brillante ejercicio en la escuela, que proporciona el modo de repetir, practicar y completar los cálculos estudiados ya de modo teórico y abstracto. Pero, para dar un sentido de realidad y hacer útiles los cálculos y la resolución de problemas, se aconseja introducir en la escuela varias directivas, esto es:

Todo género de estadísticas, en especial, las que se refieren a la realidad presente, nacional o internacional.

Comparaciones estadísticas entre el presente y un pasado histórico.

La medición de terrenos y su reducción al dibujo.

La medición de pequeñas superficies o pequeños volúmenes de habitación, calculada con aproximación de fracción, etc.

Problemas

Cálculos volumétricos de edificios imaginarios o de monumentos y sus diversas partes; o también, cálculo del material necesario para construir un edificio.

Cálculo de cubicación de habitaciones.

Aprovechar la ocasión para presentar dibujos de arquitecturas varias.

Precio de terrenos por unidad de medida y precios del material de construcción.

Costo de construcción de vías férreas.

Lista de precios, lo más aproximados posible, de tejidos de:

seda

lana

lino

algodón, etc.

Precios de artículos alimenticios, al por mayor y menor.

Medidas geográficas.

Areas de provincias.

Altitudes de montañas.

Cálculo de distancias geográficas.

Vías férreas viajes precios y horarios.

Proyectos de viajes y cálculo de gastos.

Viajes por mar.

Viajes en aeroplano.

Alpes

Montblanch 4807 m.	Pelvouse — 4103 m. (vertiente francesa) Gran Paradiso — 4061 m. (vertiente italiana)

En los Alpes Occidentales: Monviso 3841 m. Rocciamelone 3538 m.

M. Rosa — 4638 m.
Cervino — 4482 m.
Fnisteraahrhorn — 4275 m.
Jungfrau — 4119 m.
Cima Pusanella — 3564 m.
Marmolada — 3350 m.
Adamello — 3454 m.
Oetez — 3775 m.
Pico de los Tres Señores — 3505 m.
Gran Sasso — 2914 m. (Apeninos):
Etna — 3279 m.

Carpatos

M. Negoi 2450 m. (Transilvania).
M. Tatras 2660 m.

Pirineos

Pico de Aneto (Grupo de la Maladetta) — 3405 m.
Mulhacen (Sierra Nevada) 3481 m.

Balkánica

Dormitor — 2530 (Montenegro).
Montes malditos — 2700 (Alpes albaneses).
Alpes helénicos — 2985 m.

Los problemas pueden tomar la forma de *mandatos,* al igual que los de la gramática.

Los maestros pueden preparar grupos de problemas según los distintos temas—bien catalogados—de modo que los niños tengan facilidades para la elección.

Es deseable, que los mismos niños planteen problemas sobre proyectos de casas, de viajes, de compras, etc.

Algunos problemas humorísticos deben ser planteados para suscitar una respuesta crítica.

Por ejemplo: Un elefante come en 10 minutos treinta panecillos de lujo ¿cuántos comerá en un día?

La respuesta es que se ignora si el apetito durará las 24 horas con la misma intensidad que los 10 primeros minutos y si será posible preparar tantos panecillos de lujo como requiera el apetito del elefante.

Bebe un quintal de agua en 10 minutos ¿cuánta agua beberá si sigue haciéndolo durante 6 horas? ; el animal reventará.

Otro puede ser: Calcular la cubicación de una iglesia por el número de fieles que pueden entrar en ella respirando durante una hora con las puertas y ventanas cerradas.

La respuesta es, que al cabo de una hora, si se calcula la cubicación, todos los fieles estarían asfixiados.

MEDIDAS NO METRICAS NI DECIMALES

Las *medidas* y la precisión de determinar *unidades de medida* como puntos de partida para juzgar exactamente las *cantidades* en sí mismas, son la necesidad más fundamental de la vida social. La aritmética enseña en abstracto el juego de los números y nosotros aplicamos aquel juego a las realidades prácticas. Pero, ante todo, es necesario poner en vez de la unidad *uno,* de la serie de los números, *una cantidad real determinada y fija* de la cual se parte por *acumulación* para medir la cantidad precisa de las cosas. Esta es, para todas las aplicaciones, *la unidad de medida.*

También el dinero, por medio, del cual se compra y se vende, debe tener un valor fijado por el uso, y, bien determinado, debe basarse en una unidad de medida.

Es por todos sabido que en tiempos antiquísimos se realizaban «cambios en especie». Uno tenía necesidad de un caballo y lo pedía dando a cambio un cierto número de ovejas, o también substancias alimenticias de que el otro tenía necesidad, etc. También en estos cambios se hacía necesario una medida precisa y se establecía de común acuerdo que, un caballo, por ejemplo, valía seis ovejas. Para facilitar los cambios se tendía a poner como tipo de valuación una sola cosa, un cierto valor, por ejemplo, una oveja. En la antiguedad, los romanos, así lo hacían y aún existe la palabra *pecunia* para indicar dinero. Los griegos tenían el buey como unidad de valor; en efecto, dice Homero que las armaduras de Diógenes valían muchos bueyes.

Todavía hoy se practican usos semejantes entre algunos pueblos aislados; así, por ejemplo, un periódico, fundado por un misionero, vale su suscripción entre los esquimales un ánade salvaje por un trimestre y una foca por un año. Esto, sin embargo, no podría ser entre gente que viaja, entre personas que tienen distintas costumbres y necesidades, pues, se podían encontrar en la situación de Alí Said en la fábula siguiente.

Problema fábula (tomado del viaje a través de Africa, de Cemerón, citado en el libro «Principios de Economía Política». C. Gide).

Un cierto Alí Said tenía necesidad de una barca.

Se dirigió entonces a un árabe y le preguntó qué quería a cambio de su barca. El árabe le contestó que no aceptaría otra cosa que marfil, porque era ésto lo que necesitaba, pero Alí Said, no tenía marfil. Entonces le dijeron que un tal Mohamed buscaba telas y daría a cambio de ellas marfil, del que poseía gran cantidad. Pero Alí Said no tenía telas para conseguir el marfil de Mohamed. Supo, sin embargo, que un tal Gererib tenía gran cantidad de telas y buscaba el desprenderse de ellas para adquriir, en cambio, alambre, que neceitaba. Alí Said tenía mucho alambre ; fué, pues, a ver a Gererib y se lo dió recibiendo a su vez las telas. Llevó las telas a Mohamed y recibió marfil, dió este marfil al árabe y obtuvo la barca.

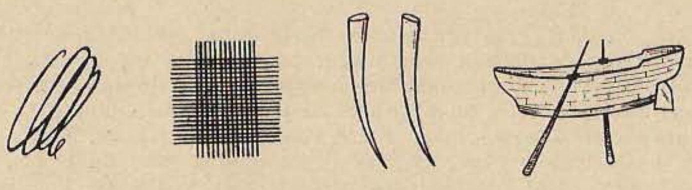


Fig. 300

Es evidente la necesidad de facilitar estos cambios encontrando una materia única que todos pueden aceptar a trueque del objeto que están dispuestos a vender, porque, con esta materia única, podrán después comprar lo que necesitan en cualquier parte del mundo, y entonces, en lugar de los cambios comnlicados de :

Alí-Said — alambre. Gererib — telas.	Telas a Alí-Said. Alambre a Gererib.
Alí-Said — telas. Mohamed — marfil.	Marfil a Álí-Said. Telas a Mohamed.
Alí-Said — marfil. Arabe — barca.	Barca a Alí-Said. Marfil al árabe.

todo género de cambio tendrá lugar a través de una materia única y no directamente. Este es el origen del *dinero*. La materia única debía reunir muchos requisitos ; ser fácilmen e reconocible y no estar sujeta a alteraciones. A dicho fin se escogió el *oro*.

También el oro se tenía que medir y al principio sirvieron las barras de oro, pero en seguida se hicieron necesarias *pequeñas cantidades y* éstas quisieron distinguirse según el lugar de donde provenían y así se usaron chapas de oro, sobre las cuales, se marcaban signos—figuras simbólicas o palabras—y fueron las *monedas*.

Pero, como el oro no tiene suficiente resistencia, se mezcla con otros metales más duros y a ésto se llama aleación, y la cantidad de oro en relación con otros metales de menos valor (cobre), con los cuales se halla mezclado, se llama ley de la aleación.

Todo el dinero tiene valor según su equivalencia en *oro*.

Si se tratase de transportar una gran cantidad de dinero sería muy pesado ; para evitar este inconveniente, se usa la moneda de papel o billete de Banco.

El verdadero valor de un billete de 100, de 500 o de 1000 pesetas lo da el oro que representa y que ha quedado en el Banco. Si no existiera en el Banco este oro, el papel, o sea, el billete de Banco, no tendría valor alguno efectivo.

El dinero español tiene como unidad la peseta.

Pero cada país tiene la unidad monetaria distinta, por ejemplo : Inglaterra, la libra esterlina ; Norteamérica, el dólar ; Italia, la lira ; Francia, el franco ; Alemania, el marco ; Holanda, el florín, etc.

Es decir, que aún cuando todos tienen el oro como materia prima única en la determinación de los valores monetarios, cada uno ha fijado diversa cantidad de metal precioso para la respecivta *Unidad Monetaria*.

Por esta razón hay que recurrir a los cambios entre una y otra nación, con objeto de igualar el valor extranjero y nacional en el cambio de dinero. El dinero español sigue el sistema decimal, porque tiene como centro la peseta y sus múltiplos y submúltiplos decimales.

Las unidades monetarias legales en España son las siguientes :

Monedas de oro		Monedas de plata		Monedas de cobre	
	100 ptas.		5 ptas.		0'10 ptas.
	50 »		2 »		0'5 »
	20 »		1 »		0'2 »
	10 »		0'50 »		0'1 »
	5 »				

Cupro-niquel : 0'25 ptas.

Billetes de Banco	
	1000 ptas.
	500 »
	100 »
	50 »
	25 »

Un ejemplo de país donde no existe en el cómputo monetario el sistema decimal es la moneda inglesa.

Esta se basa sobre la *Libra esterlina* o *Pound* o *Soberano*, moneda de oro. La esterlina comprende 20 chelines (plata) y el chelín 12 peniques (cobre). Se acuñan en Inglaterra las siguientes monedas de oro :

5 esterlinas
2 »
1 »

Monedas de plata — 1 chelín
2 y 1/2 chelines.

Los billetes más corrientes, son :

10 chelines
1 esterlina
5 esterlinas.

El dólar es una moneda de plata. Se acuñan monedas de oro de 10 y 20 dolares. El dolar se divide en 100 centavos de los cuales hay moneda de 10, 20 y 25 centavos.

Para simplificar el cálculo sobre los cambios, poner los cambios a la par, o sea, la esterlina : 25 ptas. ; el dólar : 5 ptas., etc.

Los cálculos sobre cambios y monedas extranjeras pueden estar acompañados de estudios sobre exportaciones e importaciones y, por lo tanto, sobre la distribución geográfica de los productos y de las materias primas. A los precios de origen se puede acompañar el costo del transporte (longitud de los viajes, por mar especialmente) y de las aduanas.

Los problemas deben ser redactados como «órdenes» inicialmente, con la finalidad de inducir a indagaciones que, aún cuando no sean en sí rigurosamente exactas, conducen la mente hacia la realidad de la vida social y hacia otras pesquisas y estudios colaterales (geografía, historia, etc.) que llevan a una más vasta cultura a través de la actividad de los niños.

EL TIEMPO

También el tiempo para ser medido tiene necesidad de un punto de referencia unitario.

Este, considerado en el *día*—tomado de la Naturaleza—puede ser común a todos los pueblos. El día va de un mediodía a otro, y antiguamente se computaba con exactitud por medio del Sol, pues un bastón proyectaba la sombra según el camino de aquél.

En Egipto se hicieron las primeras determinaciones exactas del tiempo y como el número 6 era base de la numeración múltiple en el sistema del cálculo, así las divisiones del día fueron hechas a base del 6 ; 6, 12, 24. El día fué dividido en 24 horas, de este modo el día y la noche eran doce horas, y la mitad del día de seis.

Añadiendo a esto las ulteriores subdivisiones hechas posibles, gracias al perfeccionamiento mecánico del reloj y de las computaciones decimales, la hora fué dividida en 10 × 6 minutos, esto es, en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, conservándose de este modo la base original del 6.

La agrupación de los meses fué análoga porque se distinguen grupos de 30 días aproximadamente $(\frac{60}{2})$ y los meses son $12 = 2 \times 6$.

En cambio, la división de la semana en 7 días tiene su origen en Moisés que cuenta la creación de 6 días, a los cuales, sucedió el día de reposo. Toda la Cristiandad (año litúrgico) considera el año dividido, solamente, en semanas.

La subdivisión del tiempo en el año, está establecida en el calendario.

Para las relaciones entre el tiempo y los valores se considera, sin embargo, *la hora* con sus subdivisiones. Por ejemplo, la jornada del obrero, el tiempo invertido por trenes que son más o menos rápidos. Y el valor, es decir, el costo del viaje aumenta si se ha recorrido el espacio en un tiempo menor (trenes rápidos, expresos, etcétera) y lo mismo sucede en los viajes por mar. Por lo tanto, la frase «el tiempo es oro» tiene una base positiva en las medidas

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZONES Y PROPORCIONES

REGLA DE TRES

Si comparo el metro con el decámetro, deduzco que, el metro es la décima parte del decámetro, como ya lo indica la misma palabra. Yo, sin embargo, expreso este hecho evidente diciendo, que la *relación* entre un metro y un decámetro es 10. Sí después comparo el decímetro con el metro, debo repetir el mismo concepto cambiando los términos; la *relación* entre un decímetro y un metro, es 10. Puedo, pues, sentar la siguiente conclusión; entre el metro y el decámetro hay la misma relación que entre el decímetro y el metro, o lo que es igual, que dichas medidas están en la *misma proporción*.

Si dijese ahora, que el metro es al decámetro como el decímetro al metro, diría lo mismo, pero, expuesto en tal forma, que las dos relaciones se ponen en precisa confrontación.

Si utilizásemos números abstractos podría hacer análoga comparación; por ejemplo, si comparo 2 con 6, puedo decir que la relación entre 2 y 6 es $\frac{1}{3}$ porque 2 es la tercera parte de 6.

Y esta relación es la misma que entre 5 y 15, porque 5 es la tercera parte de 15.

También aquí puedo aplicar la frase enunciada anteriormente: 2 es a 6 como 5 es a 15. Esta frase en vez de utilizar palabras se puede expresar con signos, de la siguiente manera:

$$2:6 \; :: \; 5:15$$

Los dos puntos indican una división y los cuatro puntos quieren decir «como»; esto es que los dos términos guardan entre sí la misma relación, porque las dos relaciones son iguales. Finalmente, y utilizando los signos ya conocidos, aquella igualdad se puede repetir en la forma siguiente: $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$ Son, pues, dos proporciones iguales a $\frac{1}{3}$.

Pero lo mismo puede decirse $6:2 \; :: \; 15:5$, esto es $3 = 3$.

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5}\; 3 =$$

La relación 6 :2 es inversa a la 2 :6, del mismo modo que lo son 15 :5 y 5 :15.

Podría análogamente repetir infinitas relaciones y decir :

12 :4 : :30 :10 y también 120 :40 : :300 :100.

La inversa sería también igual relación 40 :120 : :100 :300.

Se puede, pues, establecer con más comodidad una fórmula algebraica de la proporción en la forma siguiente :

a :b : :c :d

a y *b* se llaman primero y segundo término de la relación o razón y *c* y *d* tercero y cuarto término.

Ahora bien, cuando la relación entre el primero y segundo término es igual a la que existe entre el tercero y cuarto se dice que las *razones están en proporción* ; los términos segundo y tercero se llaman *términos medios*, mientras que, el primero y cuarto se llaman *extremos*.

Volvamos ahora a la primera proporción :

1m : 1Dm : :0'10 m :1m.

Esta se puede expresar en decímetros para evitar los números decimales y entonces el metro se convierte en 10 decímetros y el Decámetro en 100 dm. Tendremos pues :

10 :100 : :1 :10 o también 1 :10 : :10 :100

Esta proporción tiene la particularidad que los dos medios son iguales, y dicha proporción se podría expresar algebraicamente en la siguiente forma :

a :b : :b :c

Existe, pues, una continuidad entre estos términos 1, 10, 100. Para pasar del uno al otro, precisa la misma proporción. Lo mismo sucedería si dijéramos :

Porque 60 es tres veces 20, 180 es tres veces 60 y entre los términos 20, 60, 180 existe la misma relación y lo mismo podríamos decir : 2 :6 :18 :54 :162 etc. porque cada término es triple del anterior.

En la jerarquía decimal, cada grado es 10 veces el anterior 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 etc.

Tales razones se llaman continuas.

Volvamos ahora a aquella forma especial que interpreta la división entre los términos como una fracción o, mejor, la pone en forma de proporción :

$$2:6::5:15 \quad \frac{2}{6}=\frac{5}{15}$$

Igualmente sucede con las inversas $\frac{6}{2}=\frac{5}{15}$ y en general $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Si se trata de dos fracciones que se reducen a un común denominador, se logrará así la prueba de la igualdad :

$$\frac{2}{6}=\frac{5}{15}=\frac{2\times 15}{6\times 15}=\frac{5\times 6}{15\times 6}=\frac{2\times 15}{90}=\frac{5\times 6}{90}$$

Estas dos fracciones tienen igual denominador 6 × 15 = 90.

La comparación ha de ser sólo entre los numeradores 2 × 15 = 5 × 6.

Efectuemos las operaciones :

2 × 15 = 30
5 × 6 = 30

Pero, lo interesante es confrontar estos productos con la proporción inicial y observar los desplazamientos ocurridos en los términos. Esto es, confrontar aquellos productos con la fórmula :

2 × 15 = 5 × 6
2 :6 : :5 :15

2 y 15 son los extremos mientras 6 y 5 son los medios.

Resulta, pues, que si cuatro términos están en proporción el producto de medios es igual al producto de extremos.

Veamos otro ejemplo.

3 :9 : :6 :18 o lo que es igual $\frac{3}{9}=\frac{6}{18}$

Reduciendo a un común denominador, tendremos :

$$\frac{3\times 18}{9\times 18}=\frac{6\times 9}{18\times 9}=\frac{3\times 18}{162}=\frac{6\times 9}{162} \quad 3\times 18=6\times 9$$

La igualdad de los términos va ahora confrontada, en el mismo orden que guardan en la proporción

3 × 18 = 6 × 9
3 : 9 : : 6 : 18

En general, si tenemos la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y se reduce a común denominador

$$\frac{a \times d}{b \times d}=\frac{c \times b}{b \times d}$$

Resulta que $a \times d = c \times b$ y $a : b : : c : d$.

Si se tiene, pues, una proporción continua $a : b : : b : d$ resulta $a \times d = b^2$, el producto de los extremos es igual al cuadrado de los medios.

En esta fórmula tenemos geométricamente la igualdad de un cuadrado y un rectángulo.

REGLA DE TRES

Estas observaciones conducen a una reflexión ; si en una proporción se conocieran tres términos solamente y el cuarto fuese desconocido, éste se hallaría sin dificultad, ya que se debe encontrar con uno de aquellos en la misma relación que los otros dos también conocidos.

Utilicemos la proporción ya conocida :

$$2 : 6 : : 5 : 15$$

Pero supongamos que el 15 no se supiera hallar y constituye una incógnita, una X, como se dice : un interrogante.

Una vez comprendido lo que es una proporción, esto parece inverosímil, pues, cualquiera comprende que si el 6 es tres veces 2, el número que se busca será tres veces 5.

Nosotros suponemos la existencia de una persona que no comprenda este hecho tan evidente y que quede perpleja ante la pregunta : Si 2 es la tercera parte de 6, ¿de qué número será el 5 la tercera parte?

Planteemos la proporción y será :

$$\frac{2}{6} = \frac{5}{x} \quad 2 : 6 : : 5 : X$$

Sabemos, sin embargo, que 6×5 debe ser igual a $2 \times X$ luego $2 \times X$ debe ser precisamente 30 como lo es 6×5.

$2 \times X = 30$. Es evidente que X será la mitad de 30, es decir $\frac{30}{2} = 5$

Pongamos otro ejemplo :

$$4 : 16 : : 25 : X$$

Yo sé una cosa, y es, que $4 \times X$ debe ser igual a 16×25. Luego $4 \times X = 400$. Luego X es la cuarta parte de 400 o sea $400 : 4 = 100$.

En efecto, 16 es 4 veces 4, y 100 es 4 veces 25.

Este sencillo ejercicio se puede expresar con fórmulas algebraicas $a : b : : c : X$

$$X = \frac{c \times b}{a}$$

Lo cual se puede expresar así : Si la incógnita es un extremo, será igual al producto de medios divididos por el otro extremo conocido.

¿Y si X fuera un medio? Por ejemplo $4 : 16 : : X : 100$.

Se sabe entonces que $4 \times 100 = 16 \times X$, luego $400 = 16 \times X$, de donde $X = \frac{400}{16} = 25$.

Lo cual se puede expresar así :

Si la incógnita es un medio, será igual al producto del extremo y dividido por el otro medio conocido.

Así he hallado el medio incógnito. Si $a : b : : X : c \quad X = \frac{a \cdot c}{b}$

Esta regla, con la cual se halla el término desconocido de una progresión, se llama «Regla de tres». Se podría decir que es la regla de los tres conocidos que van en busca del otro compañero desconocido.

Expuesta en la forma que lo hemos hecho, parece inútil esta regla de tres, ya que es sencillísima de encontrar la incógnita por el simple razonamiento.

Pero no siempre sucede así. Nos podemos hallar en casos, en que sería muy difícil hallar el cuarto término sin ayuda de la regla de 3.

Por ejemplo : Sé que un tren recorre 450 km. en 6 horas. ¿Cuántos recorrerá en 10 horas?

Entonces establece la proporción :

en 6 horas recorre 450 Km.
en 10 horas recorre X Km.
y lo pongo en la fórmula 6 :450 : :10 :X. 450 × 10 = 6 × X

$$X = \frac{450 \times 10}{6} = \frac{4500}{6} = 750$$

Luego en 10 horas recorrerá el tren 750 Km.

Para cubrir 16 ventanas se precisan 42 m's. de tela, ¿cuánta tela habrá que comprar para cubrir 56 ventanas?

para 6 ventanas 42 m. 6 :42 : :56 :X 6 × X = 42 × 56.
para 56 ventanas X m. $X = \frac{42 \times 56}{6} = \frac{2352}{6} = 392$ m.

Debo, pues, comprar 392 metros de tela.

REDUCCION A LA UNIDAD

Si no aplicase la regla de tres, debería hacer la reducción a la unidad.

Esto es, en el ejemplo del tren que recorre 450 km. en 6 horas puedo averiguar cuantos recorre en una hora, que son $\frac{450}{6}$

De aquí puedo obtener la longitud de recorrido a la misma velocidad durante un número cualquiera de horas multiplicando este número por el recorrido de una hora.

En nuestro caso, en 10 horas recorrería el tren :

$$\text{Km. } \frac{450}{6} \times 10.$$

En cambio, con la regla de tres ¿qué fórmula se obtiene para X?

$$450 :6 : :X :10 \quad X = \frac{450 \times 10}{6}$$

Pero esta fórmula es igual a la otra, porque ya sabemos, que para multiplicar una fracción por un entero se multiplica éste por el numerador.

$$\frac{450 \times 10}{6} = \frac{450 \times 10}{6} = 75 \times 10 = 50 = \frac{4500}{6}$$

$$750 = 750$$

Tomemos el otro ejemplo de las telas y las ventanas. 42 mts. eran necesarios para 6 ventanas.

Para una ventana se precisan $\frac{42}{6} = 7$ m.

Y para 56 ventanas $\frac{42}{6} \times 56$.

Para multiplicar esta fracción por 56 se debe multiplicar el numerador $\frac{42 \times 56}{6}$

La regla de tres, en cambio, era

$$42 :6 : :X :56 \qquad X = \frac{42 \times 56}{6}$$

Se obtiene en un caso $\frac{42 \times 56}{6}$ y en el otro $\frac{42 \times 56}{6}$

¡Escoged entre los dos! ¿Cómo es posible si son iguales?

Aquí hemos llegado ante una dificultad insuperable y no sabemos proseguir.

INDICE

Págs.

GENERALIDADES

LAS JERARQUIAS

LA DIVISION

EJERCICIOS CON LOS NUMEROS

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

ALGEBRA

RAIZ CUADRADA

RAIZ CUBICA

LA RAIZ TRINOMIAL

REALIZACION

SISTEMA METRICO DECIMAL

RAZONES Y PROPORCIONES

La obra de la Doctora Montessori

Su evolución y desarrollo

El primer experimento Montessori tuvo lugar en la «Casa dei Bambini» de San Lorenzo, en Roma, el año 1906.

El «Método de la Pedagogía Científica», fruto primero de este experimento, apareció el año 1909. La otra obra fundamental de la Montessori, que examina la posibilidad de aplicar a las escuelas elementales el método experimentado en la «Casa dei Bambini» apareció en 1912.

En 1913 se abría en Roma el *Primer Curso Internacional Montessori,* seguido, con intervalo de un año, por el segundo. Estos cursos fueron la verdadera fragua del movimiento montessoriano. Una gran idea y una gran fe hubo de animarlos, la simple palabra supo traducirse en quien la escuchaba, en voluntad, acción y creación, y de estos cursos irradiaron a todas las partes del mundo, donde se habían llamado a reunión, energías ansiosas de actuar. Fueron, a partir de entonces, el fuego perenne de la idea montessoriana y el único centro de preparación de los maestros.

En el curso de 1913 la participación más importante fué la de los *Estados Unidos de América* con 60 maestros. En los Estados, con anterioridad al curso de 1913, se habían constituído dos escuelas Montessorianas, una en Tawytown y la otra en Wáshington. En diciembre de 1913, la doctora Montessori cruzaba el Océano y desarrollaba un ciclo de conferencias en New-York, Wáshington y Boston. Conviene hacer observar que la Doctora Montessori ha dado sempre sus lecciones y sus cursos en lengua italiana. Volvió a América en 1915 para desarrollar su primer curso internacional en Los Angeles y este solo hecho dice con cuánto interés acogía y favorecía América la innovación Montessoriana. La primera Sociedad Montessori se constituyó en 1914 y en 1916 se iniciaba, bajo la dirección de Helen Parkhurst un curso para la preparación de las maestras montessorianas, que todavía continúa con éxito creciente bajo la inspección de la *Child Education Foundation,* entdad nacional que dirige el movimiento montessoriano en los Estados Unidos.

Helen Parkhurst, discípula de la Doctora Montessori, es la creadora del *Dalton Plan Individual Work System* que debe considerarse como una filial del Método Montessori.

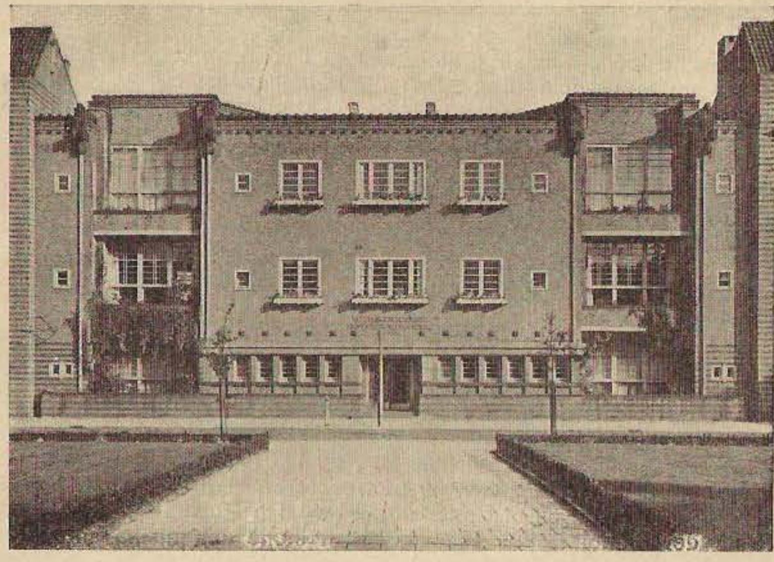
Algunas de las principales ciudades donde funcionan Escuelas Montessori

De los cursos de 1913 y 1914 irradiaron también los primeros núcleos alemanes que, ya antes de la guerra, crean escuelas elementales y jardines de la infancia, uno de los cuales permaneció abierto durante toda la contienda. En 1919 tuvo lugar el primer experimento oficial. Desde entonces el método fué desarrollándose rapidamente a expensas del froebeliano, al cual ha sustituído en muchos casos.

La Sociedad Oficial Montessoriana es la *Verein Montessori Pedagogick Deustchlande* que se constituyó en Berlín en 1930 (Wilhermstrasse 57-58) como rama de la Sociedad Montessori Internacional, lo cual publica la revista «Montessori» (Blatter der Internationalen Montessori Gesellschaft). En Alemania la situación del movimiento reformador es especialísimo. En efecto, después de la revolución de 1918 aparece inscrito en el programa político-social de la Constitución la lucha entre un pequeño grupo de innovadores y las autoridades escolásticas tutoras de la tradición. Si acaso, la lucha existe entre los reformadores mismos. Se puede decir que Alemania ofrece uno de los campos más interesantes de experiencias pedagógicas.

Un desarrollo no menos rápido ha tenido el método en Austria. Las «Case dei bambini» construídas según especiales criterios arquitectónicos son, gracias al apoyo de los municipios, de las más ricas y mejor organizadas.

En los cursos 1913-1914 nacieron también los primeros núcleos



Escuela municipal de Amsterdam, trazada de acuerdo con modelos de la Doctora Montessori

españoles o, mejor dicho, catalanes. Unido al movimiento político catalán, el método siguió sus vaivenes. En dichos años fué adoptado en jardines de la infancia, privados y públicos y en colegios de religiosos, tanto para niños normales como para anormales. En Barcelona tuvo lugar en 1915 el IV Curso Internacional. Los libros de la Montessori traducidos al español son adoptados en las escuelas normales y hoy, con el apoyo de las autoridades catalanas y del Gobierno Central se ha constituído la «*Sociedad Montessori*» afiliada a la Sociedad Montessori Internacional, con sede en Barcelona (Ronda de Universidad, 7), la cual organizó el XVIII Curso Internacional celebrado en Junio de 1933.

En Portugal, donde los libros de la Montessori han sido traducidos, se estudia, por iniciativa del Gobierno, que envió una profesora al curso que se dió en Roma bajo los auspicios del Gobierno y la Presidencia de Honor de S. E. Mussolini, la posibilidad de introducir la enseñanza montessoriana en las escuelas de aprendizaje para maestros elementales.

En Francia el desarrollo del Método llevó el mismo ritmo que el de la reforma de las escuelas, menos vivo que en otros sitios. Sin embargo, aquél, introducido desde 1913 en una pequeña escuela privada de París, después de la pausa de la guerra comenzó un movimiento ascendente que ha conducido a la creación de varias escuelas públicas y privadas.

Notable fué la iniciativa de la señora Cromwell, americana, fundadora de la escuela Montessori de Fontenay sous Bois y de un centro de preparación para maestros, la cual confió a los mutilados de la guerra la construcción del material didáctico con que dotó a escuelas superiores y elementales. La Sociedad «La Nouvelle Education», fundada en 1921 en París (Rue Denfert-Rochereau, 77), procura, a través de la publicación de la revista homónima, la organización de ciclos de conferencias, la creación de escuelas y la difusión de los principios montessorianos en Francia, donde está ahora en formación la sección francesa de la *Asociación Montessori Internacional*.

Holanda fué uno de los primeros países que adoptaron el Método y es el que obtuvo de él los mayores adelantos, pues lo ha establecido incluso para los jóvenes de los 12 a los 18 años. El Liceo Montessori de Amsterdam es el único experimento de ese género en todo el mundo.

El movimiento montessoriano en Holanda tuvo su iniciación en la primavera de 1914 después de una conferencia pronunciada por la doctora Montessori en el Congreso Pedagógico Holandés. La primera «Casa dei Bambini» fué fundada en el otoño del mismo año; dos años después se hacían las primeras experiencias en las escuelas elementales, que en Holanda educan los niños desde los 6 a los 12 años. Hoy las escuelas elementales Montessori están equiparadas a las oficiales, existen veintiuna en muchas ciudades y están construídas según los criterios arquitectónicos montessorianos. La Sociedad Montessori oficial es la *Nederslanche Montessori Vereeniging* con sede en Amsterdam (Verhulstraat 16) fundada en 1917, que cuenta con 15 filiales y publica el periódico «Montessori Opweding». Cursos preparatorios para maestras existen en Amsterdam, Utrech y Rotterdam y recientemente se ha instituído uno en la Universidad Católica de Nimega.

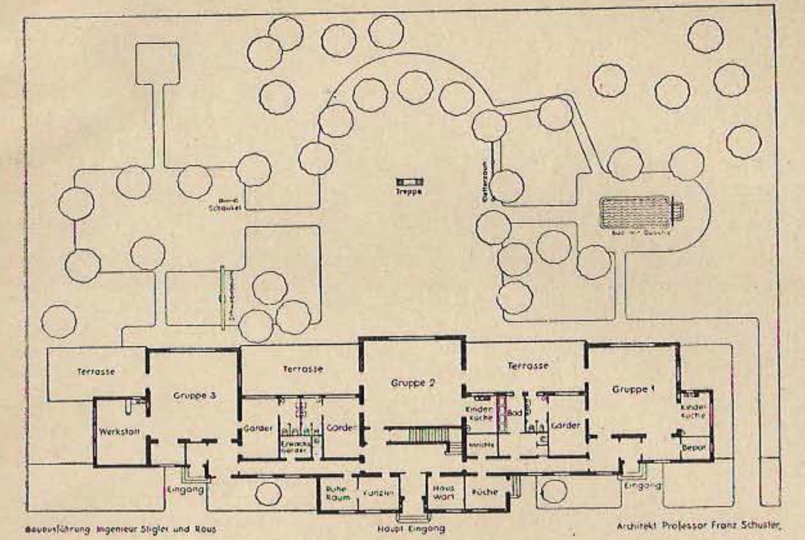
En Inglaterra y Escocia el método se ha difundido desde los años 1913-14 alcanzando las formas más perfectas. El centro del movimiento es Londres, donde tiene su sede la rama inglesa de la *International Montessori Society* cerca del *Montessori Training College* (Escuela de aprendizaje para maestros). En Londres la doctora Montessori ha tenido, desde el 1919, un curso cada dos años; el último lo tuvo en la primavera de 1933, el XVII curso Internacional.

Escuelas Montessori existen en las principales ciudades de Irlanda y también en la lejana Islandia.

En los países danubianos y balkánicos ha encontrado fervientes adeptos y ha creado escuelas y centros de preparación y propaganda.

El Gobierno Húngaro envió Maestras y Maestros a los cursos internacionales de 1929-30-31 para estudiar la posibilidad de aplicar el método Montessori en las escuelas nacionales. Una escuela Montessori forma parte de la Academia del Estado en Budapest, y

MONTESSORIHEIM - HAUS DER KINDER - Wien I., Rudolfsplatz



Escuela modelo Montessori, construída por el Ayuntamiento de Viena, según las reglas e indicaciones fijadas por la Doctora Montessori

en esta ciudad se ha constituído en 1931, como sección de la Sociedad Pedagógica Húngara, la Sociedad Montessori Nacional, asociada a la Internacional.

También en Checoeslovaquia, se ha contado desde el año 1932 con una Sociedad Montessori Nacional dependiente de la Sociedad Pedagógica Comenina, con sede en Praga, hallándose en estudio un proyecto para la aplicación del Método (adoptado ya oficialmente en los jardines de la Infancia) a las escuelas elementales.

En Rumania, de donde el gobierno envió varios maestros y profesores a los cursos de Roma 1930 y 1931, se está preparando la constitución de la Sociedad Montessori.

En Bulgaria (en Sofía), existe una hermosa escuela Montessori italiana; el Gobierno envía sus representantes a los Cursos Internacionales y tiene en estudio la creación de una escuela de preparación para maestras (preparación desarrollada hasta ahora únicamente por la «Esccela Americana del Método», de Sofía), y la constitución de una Sociedad Montessori. En los Cursos Internacionales han participado también enviados del Gobierno de Albania.

En Grecia sufrió el método las mismas alternativas que la política. Fué la Reina Sofía en persona quien en 1916 fundó la primera escuela modelo Montessori. En 1921 se inició un curso para la preparación de los maestros. Hoy existen escuelas Montessori italianas en Salónica y Corfú.

En Turquía, el Método se conoce a través de la traducción de la

Obra fundamental, y de maestras que siguieron cursos en Italia y en Austria.

Si vamos hacia el Norte, encontramos en Polonia numerosas escuelas locales organizadas por alumnos de los Cursos Internacionales.

En Dinamarca el Método, apoyado por el Gobierno, ha alcanzado una notable difusión. Las escuelas Montessori, orientadas por una sociedad Motessori danesa, acogen los muchachos hasta los quince años de edad. También en Dinamarca se aplica el Método a los jóvenes hasta los quince años.

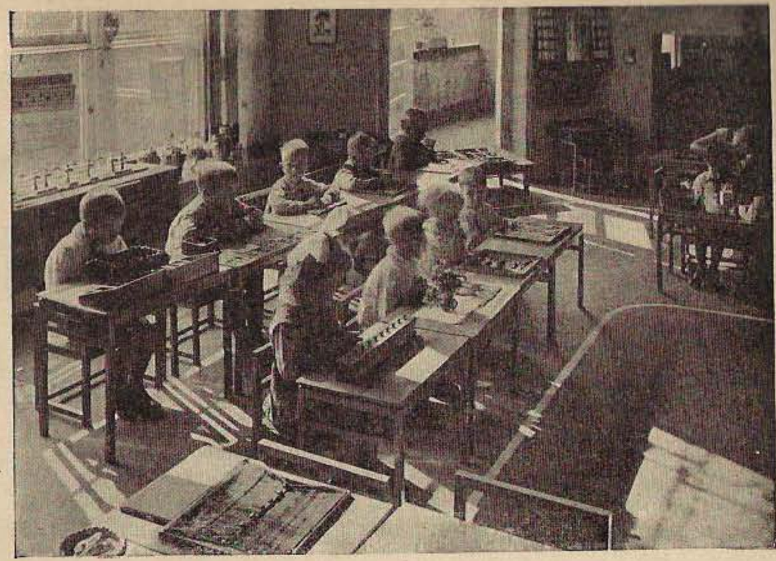
En los Países Escandinavos, Suecia y Noruega, el Método, conocido y discutido desde 1914, es aplicado (totalmente, parcialmente o en forma modificada) en varias escuelas privadas. Recientemente ha sido fundada en Suecia la Sociedad Montessori Nacional, *Svenske Montessori Foreningen* (Estocolmo) como rama de la Sociedad Internacional Montessori. En Kowno, capital de Lituania, funciona una escuela modelo Montessori, organizada por el Gobierno y en Letonia existen colegios particulares fundados por alumnos de los Cursos Internacionales.

En el continente africano encontramos escuelas Montessorianas en Libia, Somalia, Túnez, Argel, Marruecos, Nigeria, Na.al, Kenia, Unión Sudafricana y Egipto; en estos dos últimos países las numerosas escuelas Montessori han sido creadas e impulsaldas por los Gobiernos respectivos.

¿Y en Asia? En Palestina, la primera escuela Montessoriana, la de Jerusalén, data de 1922; hoy son ya numerosas las escuelas modelo, principalmente en las colonias sionísticas de reciente formación. En la Georgia existen escuelas particulares Montessorianas que tienen su origen en los Cursos Internacionales.

A los Cursos Internacionales han enviado observadores los Gobiernos de Siam (1929-30); en el Japón se aplica el Método en una escuela particular. En Filipinas, alumnos del curso Internacional del 1914 han fundado una escuela Montessori; escuelas Montessori funcionan en China donde existe igualmente una escuela de aprendizaje. En Ceylán existen Escuelas Montessori, particulares. En la India, sobre todo, ha encontrado el método desde los primeros años acogida favorable tanto en el ambiente inglés como en el indígena. Existen escuelas Montessori en las principales ciudades y se está constituyendo con programa orgánico y vastas adhesiones la Sociedad Montessori India.

En territorio americano, el Método se ha desarrollado además de los Estados Unidos, en Canadá, Méjico y Cuba, donde han surgido escuelas privadas que se sirven del material didáctico y en la República de Panamá que oficialmente lo ha aplicado a todas las escuelas de párvulos. Bajo la inspección del Gobierno funciona allí, desde hace tiempo, un Curso de aprendizaje; en 1931 se constituyó la Sociedad Montessori Nacional y los libros de la Montessori están adoptados como texto en las Escuelas Normales.



Una de las salas de la escuela Montessori de Hyjuaplein (Holanda)

En Colombia, donde el Método es conocido desde 1915 existen escuelas Montessori, oficialmente reconocidas por el Gobierno.

También en Perú, Bolivia, Ecuador, Venezuela y Chile, el Método se ha adoptado oficialmente. En Chile la Sociedad Pedagógica Montessori inspecciona las escuelas y las clases montessorianas y el Gobierno envió observadores a los cursos internacionales de 1929-30-31.

En el Brasil existen escuelas Montessori y en la Argentina y Paraguay el método es conocido y aplicado, aun cuando de manera incompleta.

También en Australia se ha introducido el método con rapidez; en 1912 en Nueva Gales del Sur por iniciativa del Gobierno y en 1914 en los otros Estados. Se asiste, en los Jardines de la Infancia australianos, a una típica evolución del sistema froebeliano al montessoriano. El método se aplica también, aun cuando con notables modificaciones locales, a los niños de seis a ocho años. Las construcciones escolares y el material didáctico siguen el criterio montessoriano.

Premeditadamente hemos dejado para el último lugar Rusia y Suiza. Rusia porque en ella no se encuentra el Método en relación con las escuelas nacionales en la misma situación que se encuentra en otros países.

La escuela soviética se funda en aquel mismo criterio de autonomía del niño que constituye uno de los principios de la pedagogía montessoriana. Es justo, sin embargo, hacer notar que antes de la revolución, el método había sido conocido y aplicado en Rusia. Lo vemos discutido en 1912 en la prensa pedagógica; en el mismo año se publica la traducción rusa de la *Pedagogía científica*, en 1916 se constituye, en San Petesburgo también, un círculo científico para el estudio del método; en 1920 la «Casa para niños» es incorporada al instituto del Estado para la educación pre-escolástica, en el cual la fundadora de la «Casa de los niños», la señora Fausse, es invitada a ocupar la Cátedra de Pedagogía Científica según el Método Montessori.

Funcionan hoy en Leningrado, apoyadas por el Gobierno, 5 Casas de los Niños; una existe en Moscou, muchas han sido establecidas en las provincias caucásicas (donde encontramos también clases elementales Montessori); algunas en Ucrania y en Siberia. Se fabrica y se vende, por el Municipio de Moscou, el material didáctico y la Obra fundamental de la Montessori (a la cual se ha añadido en la traducción rusa «La auto-educación en las escuelas elementales») está muy difundida.

Veamos, por último, Suiza. En el centro de los experimentos Pestalozzianos y Froebelianos, el método ha encontrado uno de los terrenos más propicios y su desarrollo ha sido singularmente rápido en el Cantón Ticino, donde ha representado una de las primeras y más completas aplicaciones oficiales a los niños de raza y cultura italianas, lo mismo en los Jardines de la Infancia que en las escuelas elementales.

El Cantón de Vaud ha creado algunas escuelas Montessorianas y desde Ginebra, el *Bureau International d'Education* dirigido por Piaget y la *Ligue International pour l'education Nouvelle* dirigida por Ferrière, desarrollan la propaganda montessoriana en Suiza. Se ha fundado ahora bajo la Presidencia del Prof. Piaget la Sección Suiza de la As. Internacional.

Por último: Italia cuenta con escuelas montessorianas en casi todas las ciudades del Reino. Bajo los auspicios del gobierno italiano, se celebraron en los años 1930-31 los cursos internacionales Montessori (XV-XVI) y desde hace tres años funciona una Escuela Real Montessori donde se preparan maestras parvulistas. Además, la famosa reforma Gentile, que revolucionó los sistemas de enseñanza de aquel país, está basado sobre el método Montessori, transformando las leyes de Instrucción Pública para dar carácter oficial al sistema Montessori.

Reconocida por Benito Mussolini la suprema eficacia pedagógica que ofrece este método, ha hecho de la «Opera Montessori» un elemento facultativo oficial, inspector de los servicios técnicos de Instrucción Pública de Italia.

Síntesis:

El Método es conocido y aplicado en 60 países, oficialmente en muchos de ellos. La aplicación más vasta es la de las «Casas de los

niños», pero en casi todos los países el Método ha sido adoptado igualmente en las escuelas elementales y en uno (Holanda) en las escuelas medias superiores.

En diversos países existen, aparte de los Cursos Internacionales, cursos permanentes de aprendizaje y escuelas modelo construídas y decoradas según el criterio de la Doctora Montessori, es, pues, el único método existente para el cual se construyen expresamente edificios dedicados a la enseñanza montessoriana. Las fábricas de material didáctico, de las cuales es la más importante hasta hoy, la inglesa, proporcionan el material a todos los países que aplican el Método.

Organos oficiales del movimiento Montessoriano son los periódicos *Montessori*, italiano; *Montessori*, alemán; *Montessori Opvoeding*, holandés; *La Nouvelle Education*, francés; pero del movimiento se ocupan sistemáticamente numerosos periódicos de idiomas diversos, entre los que merecen especial mención *Kleine Klinder Das Werdende Zeital er*, alemanes, y *L'Ecole Nouvelle*, Suiza. En España aparecerá en estos días la Revista Montessori.

«Estos datos — diremos con Paolo Orano — son bastante expresivos; dicen que treinta años de obra precisa, tenaz, luminosa, han convertido un método de educación italiano en método mundial.»

Esta obra de difusión y de organización no es hija solamente de la íntima fuerza de penetración de la idea montessoriana; es debida a la incansable actividad personal de su creadora que todos los años, visitando los principales centros del movimiento y desarrollando en ellos cursos y conferencias ha dado vida a uno de los más vastos organismos pedagógicos actuales.

Hoy en día, (Diciembre 1934), se piensa en la necesidad de crear un Instituto Internacional que amalgame y dirija con capacidad jurídica, todos los centros montessorianos del mundo. A la tendencia diferenciadora debe oponerse la tendencia unificadora.

Porque si es cierto que uno de los méritos mayores del método ha sido y es su capacidad de adaptación alcanzando frecuentemente, no sólo la forma, sino la substancia del método, representa un gran peligro para su integridad. No han sido raros los casos de aplicaciones arbitrarias y erróneas, que han comprometido su prestigio.

No es solamente una labor protectora la que ha de realizar el Instituto Internacional; éste deberá dar uniformidad de directivas y valores al movimiento, organizar Cursos de aprendizaje a base de criterios unitarios, disciplinar la fabricación de material y la prensa y construir, finalmente, un centro de estudio e información.

Esta necesidad se ha expresado ya en 1929 en el Congreso de Elsinore, por impulso del Sr. Mario Montessori, que votó la constitución de una «Sociedad Montessori Internacional».